А. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. А. ШЫНЫБЕКОВ

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7 класса
общеобразовательной школы

7

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2017

1-3556

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
Ш 98

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой по предмету «Геометрия» для 7–9 классов уровня среднего образования по обновленному содержанию, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Под редакцией **М. Отелбаева** – доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан.

Условные обозначения:

?	– вопросы по новой теме;
И	– материалы из истории;
ПЗ	– практические задания;

А – упражнения первого уровня сложности;
В – упражнения второго уровня сложности;
С – упражнения третьего уровня сложности;
* – упражнения повышенной сложности и творческого характера.

Шыныбеков А. Н., Шыныбеков Д. А.
Ш 98 **Геометрия:** Учебник для 7 кл. общеобразоват. школы. – Алматы: Атамұра, 2017. – 80 стр.

ISBN 978-601-306-749-0

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72

ISBN 978-601-306-749-0

© Шыныбеков А. Н.,
Шыныбеков Д. А., 2017
© «Атамұра», 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Юные друзья! Приглашаем вас в удивительную и прекрасную страну, называемую Геометрия. Геометрия – одна из древнейших наук. Слово «геометрия» в переводе с греческого языка означает «землемерие» («гео» – земля, «метрио» – мерить). Такое название связано с тем, что с древних времен люди занимались земледелием, строили дома, дороги и т.п. При этом им приходилось делать разметки на земельных участках и проводить различные измерительные работы на земле. В результате чего постепенно накапливались знания о свойствах простейших геометрических фигур. Также делались первые попытки собрать воедино эти накопленные, разрозненные, ничем не связанные между собой геометрические знания. Эти работы, в основном, выглядели как свод правил и закономерностей, необходимых для построения нужной фигуры или ее элементов. В них почти отсутствовало понятие «доказательство» и указанные правила были написаны по принципу «делай так». Появление сочинения «Начала» древнегреческого ученого Евклида (365 – 300 гг. до н.э.) связывают с рождением геометрии как науки о фигурах и их свойствах. В нем он связал все существующие знания о геометрических фигурах в единое целое и, опираясь на некоторые простые, очевидные из жизненного опыта утверждения – аксиомы, он путем логических рассуждений вывел все имеющиеся факты о геометрических фигурах и обогатил их новыми знаниями. А метод, который он использовал при создании геометрии, позже был назван *аксиоматическим* и нашел широкое применение в современной математике и других науках.

Итак, геометрия издавна изучается на высоком теоретическом уровне: доказывается каждая *теорема*, а решение каждой задачи опирается на аксиомы и теоремы, доказанные к этому моменту. Следовательно, изучая геометрию, вы не только приобретаете знания о свойствах геометрических фигур, но и совершенствуете свою логику, учитесь убедительно рассуждать. Это важно не только для изучения математики, но и, несомненно, поможет в овладении азами всех наук без исключения.

Также геометрия развивает воображение, она изучает формы окружающего мира и поможет вам познать их красоту. Все величайшие художники не могли творить без глубоких геометрических знаний. Этот учебник должен помочь вам глубже узнать геометрию.

Данный учебник составлен на основе ранее изданного учебника «Геометрия – 7» в соответствии с учебной программой общеобразовательных школ. Здесь мы постарались учесть все замечания специалистов и отдельные недостатки, которые имели место в других изданиях учебника. Например, по многим темам увеличено количество тренировочных задач легкого уровня. По сравнению с другими учебниками данный учебник имеет ряд специфических особенностей. Задания по каждой теме специально разделены на три группы сложности: **А**, **В** и **С**. Если в группах **А** и **В** сосредоточены упражнения легкого и среднего уровней сложности, то группа **С** состоит из заданий повышенной сложности. Это позволяет пользоваться учебником как в общеобразовательной школе, так и в классах с углубленным изучением математики. Упражнения группы **С**, в основном, предназначены для классов с углубленным изучением математики и для учащихся, обладающих математическими способностями. Для удобства все задачи и необходимые рисунки пронумерованы двойными номерами. Здесь первое число указывает на номер раздела, а второе – на порядковый номер упражнения (рисунка) в указанном разделе.

При изучении курса алгебры по данному учебнику, независимо от профиля класса, рекомендуем придерживаться следующих правил: при закреплении новой темы необходимо, чтобы каждый ученик в полном объеме научился выполнять задания группы **А.** Иначе будет невозможным в полной мере освоить задания групп **В, С** и последующие новые темы.

Геометрические обозначения и знаки, используемые в 7 классе

$A, B, C, \ldots$ – точки;
$a, b, c, \ldots$ – прямые;
$\angle A$ – угол A;
$\angle(ab)$ – угол (ab);
ΔABC – треугольник ABC;
$\omega(O; R)$ – окружность с центром O и радиусом R;

$\parallel$ – символ параллельности;
$\perp$ – символ перпендикулярности;
$\cap$ – символ пересечения;
$\cup$ – символ объединения;
$\in$ – символ принадлежности;
$\Rightarrow$ – символ логического следования;
$\Leftrightarrow$ – символ равносильности.

ВВЕДЕНИЕ

Как вы уже знаете, геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур. С простейшими геометрическими фигурами и их свойствами вы знакомы с младших классов. Примерами геометрических фигур служат треугольник, квадрат, окружность, куб, шар, цилиндр и т.п. (рис.1).

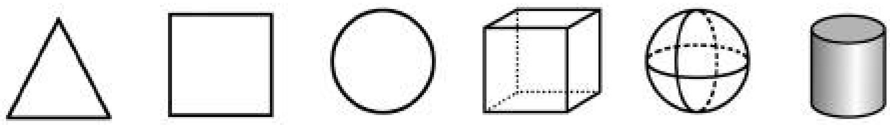


Рис. 1

Геометрические фигуры бывают весьма разнообразны. Часть геометрических фигур, объединение и пересечение геометрических фигур также являются геометрическими фигурами.

Школьный курс геометрии делится на ***планиметрию*** и ***стереометрию***. В ***планиметрии*** рассматриваются свойства фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, треугольники, прямоугольники и т.п. В ***стереометрии*** изучаются свойства фигур в пространстве, таких, как параллелепипед, сфера, цилиндр и т.п. Мы начнем изучение геометрии с планиметрии, по возможности на строго теоретическом уровне. Это аксиоматический подход к построению геометрии. Кратко поясним сказанное.

В целом, в математике любое утверждение (теорема, свойства, признаки и т.п.) доказывается, опираясь на ранее известные, уже доказанные утверждения и понятия. При этом обычное логическое строение теоремы таково. Если A_1 – некоторое, ранее доказанное утверждение, назовем его «условием», то из него путем логических умозаключений выводим новое предложение (утверждение, теорема, свойство и т.п.) A. С помощью символа логического следования $\Rightarrow$ это обстоятельство записывают так: $A_1 \Rightarrow A$. Теперь, если быть до конца строгим в математических доказательствах, то теорема A_1 сама требует доказательства и ее доказательство, скажем, опирается на ранее доказанную теорему A_2 и т.д. Этот процесс может продолжаться бесконечно, и никто не в состоянии «закончить» его, т.е. мы получили бы бесконечную цепочку теорем вида

$$\ldots \Rightarrow A_4 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A \qquad (1)$$

или циклического вида

$$\begin{tikzcd}
& A_3 \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
A_4 \arrow[ur, Rightarrow] & & A_2 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & A_1 \arrow[r, Rightarrow] & A \ldots \\
& A_5 \arrow[ul, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

Аналогично, всякое новое понятие определяется с помощью ранее известных понятий. Например, «четырехугольник, у которого все стороны равны и все углы равны 90°, называется квадратом». Здесь новое понятие «квадрат» определяется с помощью ранее определенных понятий «четырехугольник», «сторона», «угол» и т.д. При попытке определения этих понятий мы должны опираться на другие известные понятия и т.д., т.е. попытка дать определение всем понятиям также приводит нас к бесконечной цепочке понятий вида (1) и (2). Отсюда возникает необходимость прерывания этих бесконечных цепочек теорем и определений, т.е. возникает необходимость взять отдельные понятия без определения, в качестве основных, и некоторые теоремы без доказательства – их называют ***аксиомами*** и вся теория строится на базе этих основных понятий и аксиом (утверждений, принимаемых без доказательства). Коль скоро мы выбрали основные понятия, то мы должны знать их взаимоотношения между собой. Такие отношения также заранее оговариваются и их называют основными отношениями данной теории. Здесь мы привели элементарную схему обоснования аксиоматического метода строения геометрии. Это полезно знать. Ибо теперь мы в процессе изучения геометрии будем доказывать все утверждения, свойства и теоремы, опираясь на принятую систему аксиом, и будем определять новые понятия на базе принятых основных понятий и основных отношений. И надеемся, что у вас не вызовет недоумения «повторное» определение уже известных вам понятий и доказательство «очевидных» свойств также изученных вами простейших геометрических фигур.

Несомненно, что смысл сказанного будет более понятным и ясным по мере накопления вами геометрических знаний и советуем эпизодически перечитывать введение. Это поможет более глубокому осмыслению геометрии в целом.

Раздел 1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

1.1. Точка, прямая и отрезок

1.1.1. Точка и прямая. В качестве основных фигур (понятий) на плоскости принимают точку и прямую. Точки принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D,... . Прямые обозначают строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d,... . Мы знаем, что для изображения прямых на бумаге пользуются линейкой (рис. 1.1), но при этом можно изобразить лишь часть прямой, а вся прямая представляется нам как простирающаяся бесконечно в обе стороны линия. На рисунке 1.2 изображены точки A, B, C, D и прямая a. Прямую можно обозначить двумя точками, лежащими на ней. Например, на рисунке 1.2 прямую a можно обозначить так: AB. Точки A и B лежат на прямой a, а точки C и D не лежат на этой прямой. Это записывают так: $A \in a, B \in a, C \notin a, D \notin a.$ При этом также говорят, что прямая a проходит через точки A и B. На рисунке 1.3 две[1] прямые пересекаются в точке A. Это записывают так: $a \cap b = A.$

Таким образом, отношение принадлежности точки прямой является одним из основных. Принадлежность точки прямой формулируется в первой аксиоме, данной ниже.

I. ***Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую и только одну.***

Теперь в качестве следствия аксиомы I докажем утверждение, данное ниже.

Пример 1. Докажем, что две различные прямые не могут иметь две и более общих точек.

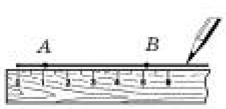


Рис. 1.1

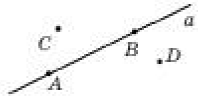


Рис. 1.2

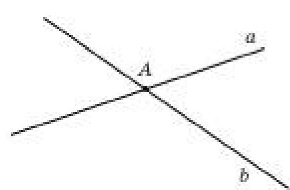


Рис. 1.3

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две прямые», «две точки», «три точки» и т.п., будем считать, что эти прямые и точки различные.

Доказательство. Если допустить обратное, что некоторые прямые a и b имеют две различные общие точки A и B, то получим, что через точки A и B проходят две различные прямые a и b. Это противоречит аксиоме I. Следовательно, две прямые не могут иметь более одной общей точки.

На рисунке 1.4 дана прямая a и точки A, B и C, лежащие на ней. Здесь точка B ***лежит между*** точками A и C, т.е. точка B разделяет часть прямой a, лежащей между точками A и C. В этом случае также говорят, что точки A и C ***лежат по разные стороны*** от точки B, или точки B и C ***лежат по одну сторону*** от точки A, или часть прямой, лежащая между точки B и C, ***не разделяется*** точкой A. Здесь мы ввели в рассмотрение новые отношения между точками прямой, опираясь на ранее известные понятия. Поэтому в качестве основного отношения между точками прямой берут отношение ***«лежат между»***, и смысл этого отношения раскрывается аксиомой, данной ниже.

II. ***Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.***

1.1.2. Отрезок. Теперь мы можем дать определение понятию «отрезок». Пусть точки A и B лежат на прямой a. Тогда множество точек прямой a, лежащих между точками A и B, называют ***отрезком*** AB, т.е. отрезок – это часть прямой a, ограниченная точками A и B (рис. 1.5). Точки, ограничивающие отрезок, называются его ***концами***, а все другие точки, лежащие между концами отрезка, – его *внутренними точками*. Например, на рисунке 1.4 точка B является внутренней точкой отрезка AC, а точки A и C – его концами.

Если два отрезка имеют только одну общую точку, то говорят, что эти отрезки ***пересекаются***. Например, на рисунке 1.6 отрезки AB и CD, AB и AE пересекаются, а отрезки AE и CD не пересекаются.

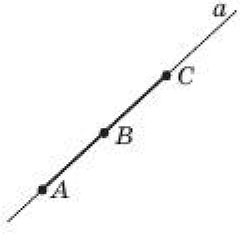


Рис. 1.4

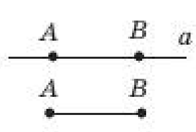


Рис. 1.5

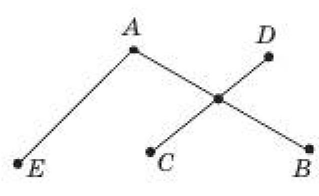


Рис. 1.6

Для того чтобы измерить отрезок, необходимо взять некоторый отрезок, который примем за единицу измерения. Отрезок, изображенный на рисунке 1.7, примем в качестве единичного отрезка, его длина равна 1 см. Если вдоль некоторого отрезка AB можно отложить ровно 4 таких единичных отрезка, то длина отрезка AB соответствует четырем единичным отрезкам, т.е. длина отрезка AB равна 4 см (рис. 1.8). А вдоль отрезка EF можно отложить 2 единичных отрезка, остается остаток, который вмещает 7 десятых долей единичного отрезка. Следовательно, отрезок EF имеет длину, равную 2,7 см. Это записывается так: $AB = 4$ см, $EF = 2{,}7$ см.

Итак, измерение длины – основное понятие, а его свойства выражаются аксиомой.

III. ***Каждый отрезок имеет определенную длину, бо́льшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.***

Это значит, что если на отрезке AB взять любую точку C, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC. Например, на рисунке 1.9 AB=10 см, AC=6 см, CB=4 см, т.е. $AB=AC+CB$.

Длину отрезка AB также называют *расстоянием между точками* A и B.

Пример 2. Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 5{,}8$ см, $AC = 2{,}5$ см, $BC = 3{,}3$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка B лежать между точками A и C? Какая из этих точек лежит между двумя другими?

Решение. Если точка A лежит между точками B и C, то по аксиоме III должно выполняться равенство $AB + AC = BC$. Но $5{,}8 + 2{,}5 \neq 3{,}3$. Значит, точка A не лежит между точками B и C.

Если точка B лежит между точками A и C, то должно выполняться равенство $AB + BC = AC$. Но $5{,}8 + 3{,}3 \neq 2{,}5$. Значит, точка B не лежит между точками A и C.

Рис. 1.7

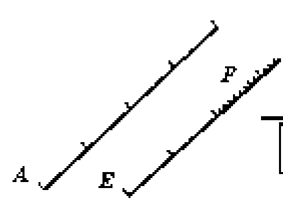


Рис. 1.8

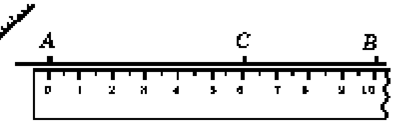


Рис. 1.9

По аксиоме II из трех точек только одна лежит между двумя другими. Значит, точка C лежит между точками A и B.

?

1. Приведите примеры геометрических фигур.
2. Назовите основные геометрические фигуры на плоскости.
3. Как обозначаются точки и прямые?
4. Сколько прямых можно провести через две точки?
5. Сколько общих точек могут иметь две прямые?
6. Объясните, что такое отрезок.
7. Сформулируйте основные свойства измерения отрезков.
8. Что называется расстоянием между двумя данными точками?

ПЗ

1. Даны прямая a и точки A и B такие, что $A \in a$ и $B \notin a$. Изобразите это на рисунке.
2. Дана прямая a. Отметьте точки A, B и C так, чтобы прямые AB и a пересекались в точке C, лежащей между точками A и B.
3. По рис. 1.10 укажите: 1) все пары пересекающихся прямых и их точки пересечения; 2) все пары пересекающихся прямых и их общие точки.

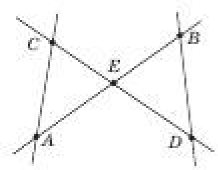


Рис. 1.10

4. Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B. Отметьте: 1) точки M и N, лежащие на отрезке AB; 2) точки P и Q, лежащие на прямой a, но не лежащие на отрезке AB; 3) точки R и S, не лежащие на прямой a.

Упражнения

А

1.1. Точка M лежит на прямой CD между точками C и D. Найдите длину отрезка CD, если: 1) CM =2,5 см, MD = 3,5 см; 2) CM =3,1 дм, MD = 4,6 дм; 3) CM = 12,3 м, MD = 5,8 м.

1.2. Отметьте на прямой две точки A и B. Отметьте на глаз середину отрезка AB. Проверьте правильность построения с помощью линейки.

1.3. Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что AB = 4,3 см, AC = 7,5 см, BC = 3,2 см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точками A и B? Какая из трех точек (A, B, C) лежит между двумя другими?

1.4. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC, если AC = 5 см, BC = 7 см? Объясните ответ.

1.5. Точка X лежит на прямой AB между точками A и B. Найдите длину отрезка AB, если $AX = 2,5$ см, $XB = 3,4$ см (рис. 1.11).

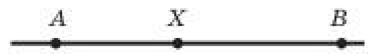


Рис. 1.11

1.6. Точка M лежит между точками K и P. Найдите расстояние между M и P, если $KP = 0,9$ дм, $KM = 0,3$ дм.

1.7. Лежат ли точки A, B, C на одной прямой, если: 1) $AB = 2,5$ см, $BC = 3,8$ см, $AC = 1,3$ см; 2) $AB = 1,9$ дм, $BC = 2,9$ дм, $AC = 4,8$ дм?

B

1.8. Отметьте на плоскости четыре точки так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой. Через каждую пару точек проведите прямую. Сколько прямых получилось?

1.9. Даны четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения имеют эти прямые, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые?

1.10. Точки P, Q, R лежат на одной прямой. Может ли точка Q находиться между точками P и R, если $PR = 7$ см, $QR = 7,6$ см? Объясните ответ.

1.11. Могут ли точки A, B, C лежать на одной прямой, если $AB = 1,8$ м, $AC = 1,3$ м, $BC = 3$ м? Объясните ответ.

1.12. Точка C – середина отрезка AB, точка O – середина отрезка AC. 1) Найдите AC, CB, AO и OB, если $AB = 2$ см. 2) Найдите AB, AC, AO и OB, если $CB = 3,2$ м.

1.13. 1) На прямой a расположены точки A, B и C, причем $AB = 5$ см, $BC = 7$ см. Какой может быть длина отрезка AC? 2) Точка C – середина отрезка AB, равного 7 м 58 см. Найдите длину отрезка AC в дециметрах.

1.14. 1) На прямой m расположены точки M, N и K, причем $MN = 8$ см, $NK = 12$ см. Какой может быть длина отрезка MK? 2) Точка F – середина отрезка EL, $EF = 3$ дм 12 см. Найдите длину отрезка EL в метрах.

1.15. 1) Точки A и B расположены по разные стороны от прямой a, $C \in a$, $AB = 37$ дм, $AC = 12$ дм, $BC = 26$ дм. Является ли точка C точкой пересечения AB и a?

2) Точки C и D расположены на отрезке AB так, что $AC = DB$, точка C лежит между точками A и D. Найдите расстоя-

Рис. 1.12

ние между серединами отрезков AB и DB, если $AB = 58$ см, $CD = 2{,}8$ дм (рис. 1.12).

1.16. 1) Точки A и B расположены по разные стороны от прямой b, $C \in b$, $AB = 29$ см, $AC = 14$ см, $CB = 16$ см. Является ли точка C точкой пересечения AB и b? 2) Точки E и F расположены на отрезке CD так, что $CE = DF$, точка E лежит между точками C и F. Расстояние между серединами отрезков CE и DF равно 8,5 дм, а длина отрезка CD равна 1,2 м. Найдите EF.

C

1.17. Даны точки A, B, C и D. Известно, что точки A, B, C лежат на одной прямой и точки B, C, D также лежат на одной прямой. Докажите, что все четыре точки лежат на одной прямой.

1.18. Даны прямые p, q, m и n. Известно, что прямые p, q, m пересекаются в одной точке и прямые q, m, n также пересекаются в одной точке. Докажите, что все четыре прямые проходят через одну точку.

1.19. На прямой отмечены точки O, A и B так, что $OA = 12$ см, $OB = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB, если точка O: 1) лежит на отрезке AB; 2) не лежит на отрезке AB (рис. 1.13).

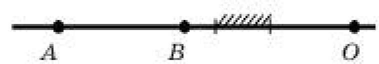


Рис. 1.13

1.20. Отрезок, длина которого равна a, разделен произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

1.21. Отрезок, длина которого равна 28 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

1.22. 1) На прямой a расположены точки P, A и B. Найдите PA и PB, если $AB = 6$ см и $PA + PB = 9$ см; 2) На прямой отмечены последовательно точки A, B, C и D так, что $AB = CD$. Существуют ли еще пары равных отрезков с концами в названных точках?

1.23. Отрезки AB и CD расположены на одной прямой, а точки B и C – ближайшие друг другу точки. Найдите длину отрезка AD, если $BC = 5$ см и расстояние между серединами этих отрезков равно 17 см.

1.2. Полуплоскость, луч и угол

1.2.1. Полуплоскость. Всякая прямая разбивает плоскость на две части. На рисунке 1.14 прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Это разбиение обладает следующим свойством. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

На рисунке 1.14 точки A и B лежат в одной из полуплоскостей, на которые прямая a разбивает плоскость. Поэтому отрезок AB не пересекает прямую a. Точки C и D лежат в разных полуплоскостях. Поэтому отрезок CD пересекает прямую a.

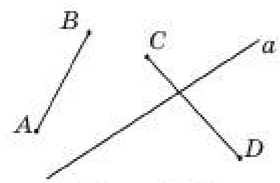


Рис. 1.14

Основным свойством (аксиомой) расположения точек относительно прямой на плоскости является нижеследующее свойство.

IV. ***Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.***

Пример 1. Даны прямая a и три точки A, B, C, не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую a, а отрезок AC не пересекает ее. Пересекает ли прямую a отрезок BC?

Решение. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости (рис. 1.15). Точка A принадлежит одной из них. Отрезок AC не пересекает прямую. Значит, точка C лежит в той же полуплоскости, что и точка A.

Отрезок AB пересекает прямую a. Значит, точка B лежит в другой полуплоскости. Таким образом, точки B и C лежат в разных полуплоскостях. А это значит, что отрезок BC пересекает прямую a.

1.2.2. Луч. **Пример 2.** Даны прямая a и точки A, X, Y, Z на этой прямой (рис. 1.16). Известно, что точки X и Y лежат по одну сторону от точки A, точки X и Z также лежат по одну сторону от точки A. Как расположены точки Y и Z относительно точки A: по одну сторону или по разные стороны?

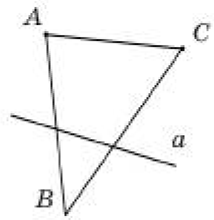


Рис. 1.15

Решение. Проведем через точку A какую-нибудь прямую b, отличную от a. Она разбивает плоскость на две полуплоскости. Одной из них принадлежит точка X. В той же полуплоскости лежат точки Y и Z, потому что отрезки XY и XZ не пересекают прямую b, а значит, точка A не принадлежит отрезкам XY и XZ. То есть точки Y и Z лежат по одну сторону от точки A.

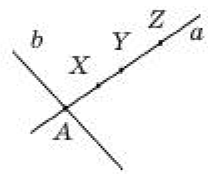


Рис. 1.16

Лучом или ***полупрямой*** называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной точки. Эта точка называется ***начальной точкой*** луча. Различные полупрямые одной и той же прямой, имеющие общую начальную точку, называют ***дополнительными полупрямыми***.

Лучи так же, как и прямые, обозначаются строчными латинскими буквами. Можно обозначать луч двумя точками: начальной и еще какой-либо точкой, принадлежащей этому лучу. При этом начальная точка ставится на первом месте. Например, луч, который выделен жирной линией на рисунке 1.17, можно обозначить через AB.

Рис. 1.17

1.2.3. Угол. ***Углом*** называется фигура, которая состоит из двух различных полупрямых с общим началом. Эта точка называется ***вершиной угла***, а полупрямые – ***сторонами угла***. Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми одной прямой, то угол называется ***развернутым***. Половина развернутого угла составляет прямой угол. Часто прямые углы на рисунке отмечают значком □ (рис. 1.18).

Рис. 1.18

На рисунке 1.19 вы видите угол с вершиной O и сторонами a, b. Угол обозначается либо указанием его вершины, либо указанием его сторон, либо указанием трех точек: вершины и двух точек на сторонах угла. Слово «угол» иногда заменяют значком $\angle$. Угол на рисунке 1.19 можно обозначить тремя способами: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. В третьем способе обозначения угла буква,обозначающая вершину, ставится посередине.

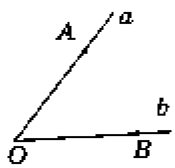


Рис. 1.19

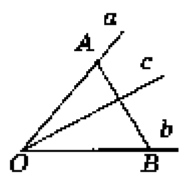


Рис. 1.20

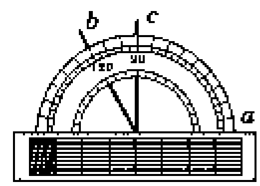


Рис. 1.21

Мы будем говорить, что ***луч проходит между сторонами угла***, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла. На рисунке 1.20 луч c проходит между сторонами угла (ab), так как он исходит из вершины угла (ab) и пересекает отрезок AB с концами на его сторонах: $A \in a, B \in b$.

В случае развернутого угла мы считаем, что любой луч, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между сторонами угла.

Углы измеряются при помощи транспортира. Обычно за единицу измерения углов принимают *градус*. На рисунке 1.21 угол (ab) равен $120°$, луч c проходит между сторонами угла (ab). Угол (ac) равен $90°$, а угол (bc) равен $30°$. Угол (ab) равен сумме углов (ac) и (bc). Также принято рассматривать $\frac{1}{60}$ долю угла, равного $1°$. Ее называют минутой и обозначают $1'$. Аналогично рассматривается $\frac{1}{60}$ доля одной минуты. Ее называют секундой и обозначают $1''$. Таким образом, $1° = 60'$, $1' = 60''$. Если точка лежит на луче, проходящем между сторонами данного угла, ее называют ***внутренней точкой угла***, а если точка лежит на луче, который не проходит между сторонами угла, то ее называют ***внешней точкой этого угла***. Множество всех внутренних точек угла называется ***внутренней частью угла***, а множество всех внешних точек – внешней частью угла.

Аксиома измерения углов выражается свойствами, данными ниже.

V. ***Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.***

Это значит, что если луч c проходит между сторонами угла (ab), то $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$.

Пример 3. Может ли луч c проходить между сторонами угла (ab), если $\angle(ac) = 30^\circ, \angle(bc) = 80^\circ, \angle(ab) = 50^\circ$?

Решение. Если луч c проходит между сторонами угла (ab), то по аксиоме V должно выполняться равенство $\angle(ac) + \angle(bc) = \angle(ab)$. Но $30^\circ + 80^\circ \neq 50^\circ$. Значит, луч c не может проходить между сторонами угла (ab).

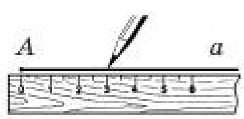


Рис. 1.22

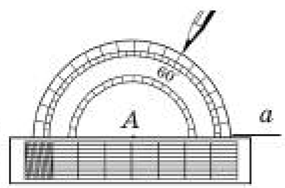


Рис. 1.23

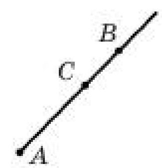


Рис. 1.24

1.2.4. Откладывание отрезков и углов. На рисунке 1.22 показано, как с помощью линейки на полупрямой a можно отложить отрезок данной длины (3 см), одним концом которого является точка A.

На рисунке 1.23 полупрямая a вместе с дополнительным лучом разбивает плоскость на две полуплоскости. Здесь показано, как с помощью транспортира отложить от полупрямой a в верхнюю полуплоскость угол с данной градусной мерой (60°).

Аксиома откладывания отрезков и углов выражается свойствами, данными ниже.

VI. ***На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.***

VII. ***От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.***

Пример 4. На луче AB отложен отрезок AC, меньший отрезка AB. Какая из точек (A, B, C) лежит между двумя другими?

Решение. Так как точки B и C лежат на одной полупрямой с начальной точкой A, то часть полупрямой, находящаяся между этими точками, не разделяется точкой A, т.е. точка A не лежит между точками B и C (рис. 1.24.). Может ли точка B лежать между точками A и C? Если бы она лежала между точками A и C, то выполнялось бы равенство $AB + BC = AC$. Но это невозможно, так как по условию отрезок AC меньше отрезка AB. Значит, точка B не лежит между двумя другими. Поэтому точка C лежит между точками A и B.

1.2.5. Аксиомы и теоремы. Во введении вы познакомились с аксиоматическим методом строения геометрии и впервые узнали понятия ***аксиома, теорема***. Теперь глубже рассмотрим значения этих понятий.

Утверждение вида « $A \Rightarrow B$ », принимаемое без доказательства и определяющее основные свойства простейших геометрических фигур, называют ***аксиомой***.

Итак, ***аксиомой называют утверждение, принимаемое без доказательства***. Слово «аксиома» происходит от греческого слова «аксиос» и означает «утверждение, не вызывающее сомнений». Например, в аксиоме IV в качестве условия утверждения A дана «прямая, лежащая на плоскости», а в качестве заключения утверждения B берется то, что «эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости». Таким образом, это простейшее утверждение принимается в качестве аксиомы, регулирующей отношение между плоскостью и прямой, лежащей на ней.

Все утверждения, принимаемые в геометрии (кроме аксиом), необходимо доказывать. ***Утверждение, которое необходимо доказывать, называют теоремой***. Вообще, рассуждение, с помощью которого устанавливается правильность утверждения о свойстве геометрической фигуры, называется ***доказательством***.

Рассмотрим пример теоремы и ее доказательства. Вывод из примера 1 можно сформулировать в виде нижеследующей теоремы.

Теорема. ***Если прямая пересекает один из трех отрезков, имеющих попарно общие концы, и не проходит через концы этих отрезков, то эта прямая пересекает только один из двух других отрезков.***

Доказательство. Пусть прямая a пересекает отрезок AB (рис. 1.25). Прямая a делит плоскость на две полуплоскости и пересекает отрезок AB. Поэтому точки A и B лежат в

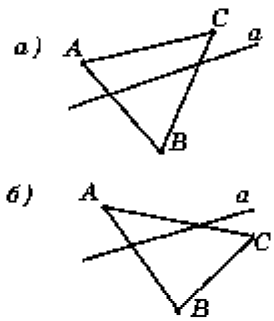


Рис. 1.25

разных полуплоскостях, а точка C лежит только в одной из этих полуплоскостей.

Если точки C и A лежат в одной полуплоскости, то точки B и C лежат в разных полуплоскостях (рис. 1.25, *а*). Поэтому прямая a не пересекает отрезок AC, а пересекает отрезок BC.

Если точки C и B лежат в одной полуплоскости, то точки A и C лежат в разных полуплоскостях (рис. 1.25, *б*). Поэтому прямая a не пересекает отрезок BC, а пересекает отрезок AC.

В каждом из этих случаев прямая a пересекает только один из отрезков: BC или AC. Теорема доказана.

В процессе доказательства теоремы используют аксиомы, доказанные теоремы или выводы из решенных примеров (последние тоже считаются теоремами). Но ни в коем случае нельзя использовать недоказанные свойства фигур. Без обоснования нельзя использовать и свойства фигур, которые видны на геометрических чертежах.

?

1. Сформулируйте основное свойство расположения точек относительно прямой на плоскости.
2. Что такое луч (полупрямая)? Какие лучи называются дополнительными?
3. Как обозначаются лучи?
4. Какая фигура называется углом?
5. Как обозначается угол?
6. Какой угол называется развернутым?
7. Объясните, что означает выражение «Луч проходит между сторонами угла».
8. В каких единицах измеряют углы и каким инструментом пользуются при этом?
9. Сформулируйте основные свойства измерения углов.
10. Сформулируйте основные свойства откладывания отрезков и углов.

ПЗ

1. Проведите прямую, отметьте на ней точки A и B и на отрезке AB отметьте точку C. Среди лучей AB, BC, CA, AC и BA найдите пары совпадающих лучей.
2. Постройте с помощью транспортира углы, равные $90°$, $50°$, $120°$.
3. Постройте на глаз углы, равные $30°$, $45°$, $60°$. С помощью транспортира проверьте точность построения.
4. Приведите примеры прямых углов, находящихся в вашем классе. По возможности измерьте эти углы транспортиром

или угольником. Можно ли найти здесь пример развернутого угла? Обоснуйте ответ.

5. Постройте рисунки, соответствующие аксиомам I – VII. Сравните их с соответствующими рисунками одноклассников. В качестве вывода сформулируйте аксиомы, соответствующие вашим рисункам.

Упражнения

A

1.24. Начертите неразвернутый угол (ab). Отметьте две точки внутри этого угла, две точки вне этого угла и две точки на сторонах угла.

1.25. Начертите неразвернутый угол. Отметьте точки A, B, C и D так, чтобы все точки отрезка AB лежали внутри угла, а все точки отрезка CD лежали вне угла.

1.26. Начертите неразвернутый угол AOB и проведите: 1) луч OC, который делит угол AOB на две части; 2) луч OD, который не делит угол AOB на два угла.

1.27. Сколько неразвернутых углов образуется при пересечении двух прямых?

1.28. Выразите в градусах $135'$; $500'$.

1.29. Выразите в минутах $6^\circ 15'$; 2°; $11{,}5^\circ$.

1.30. Выполните действия: 1) $5^\circ 48' + 7^\circ 35'$; 2) $32^\circ 17' - 8^\circ 45'$.

1.31. На рисунке 1.26 изображены лучи с общим началом O. 1) Найдите градусные меры углов AOX, BOX, AOB, COB, DOX. 2) Назовите углы, равные 20°. 3) Назовите все углы со стороной OA и найдите их градусные меры.

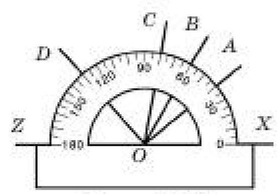


Рис. 1.26

B

1.32. Луч a проходит между сторонами угла (cd). Найдите $\angle(cd)$, если: 1) $\angle(ac) = 35^\circ$, $\angle(ad) = 75^\circ$; 2) $\angle(ac) = 57^\circ$, $\angle(ad) = 62^\circ$; 3) $\angle(ac) = 94^\circ$, $\angle(ad) = 85^\circ$.

1.33. Может ли луч PK проходить между сторонами угла QPR, если $\angle QPR = 70^\circ$, $\angle QPK = 80^\circ$?

1.34. На какой угол поворачивается минутная стрелка часов в течение 20 минут; в течение 30 минут?

1.35. На какой угол поворачивается часовая стрелка часов в течение 0,5 часа; в течение 5 минут?

1.36. Начертите угол AOB и лучи OK и OM, проходящие между сторонами этого угла, так, чтобы $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOK = 40^\circ$, $\angle MOB = 30^\circ$. Найдите $\angle KOM$.

1.37. OM – луч, делящий угол AOB пополам, OK – луч, делящий угол AOM пополам. Во сколько раз угол KOM меньше угла AOB? Обоснуйте ответ.

1.38. Может ли луч c проходить между сторонами угла (ab), если: 1) $\angle(ac) = 30^\circ$, $\angle(ab) = 80^\circ$, $\angle(cd) = 50^\circ$; 2) $\angle(ac) = 100^\circ$, $\angle(cb) = 90^\circ$; 3) угол (ac) больше угла (ab)?

1.39. Между сторонами угла (ab), равного 60°, проходит луч c. Найдите углы (ac) и (bc), если: 1) угол (ac) на 30° больше угла (bc); 2) угол (ac) в два раза больше угла (bc).

1.40. Между сторонами угла (mn), равного 90°, проходит луч l. Найдите углы (ml) и (nl), если: 1) луч l делит угол (mn) пополам; 2) градусные меры углов (ml) и (nl) относятся как 2 : 3.

1.41. Луч OE делит угол AOB на два угла. Найдите $\angle AOB$, если: 1) $\angle AOE = 44^\circ$, $\angle EOB = 77^\circ$; 2) $\angle AOE = 12^\circ 37'$, $\angle EOB = 108^\circ 25'$.

C

1.42. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB, если $\angle AOB = 78^\circ$, а угол AOC на 18° меньше угла BOC.

1.43. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC, если $\angle AOB = 155^\circ$ и угол AOC на 15°больше угла COB.

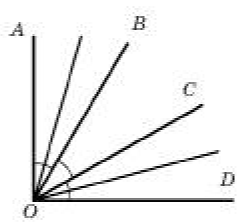


Рис. 1.27

1.44. Луч OB проходит между сторонами угла AOC. Известно, что $\angle AOC = 108^\circ$, $\angle AOB = 3 \cdot \angle BOC$. Найдите угол AOB.

1.45. На рисунке 1.27 угол AOD прямой, $\angle AOC = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный лучами, которые делят $\angle AOB$ и $\angle COD$ пополам.

1.46. Как могут располагаться точки A, B и C, если они лежат на одной прямой, и $AB = 20$ см, $AC = 15$ см, $CB = 35$ см? Обоснуйте ответ.

1.3. Треугольники

1.3.1. Треугольник. Отметим три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками (рис.1.28). Мы получим геометрическую фигуру, которая называется ***треугольником.*** Данные три точки называются ***вершинами,*** а отрезки – ***сторонами*** треугольника. Например, на рисунке 1.28 изображен треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, AC и BC. Этот треугольник обозначают так: ΔABC. $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ – углы треугольника ABC. Иногда их обозначают так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Сумма длин трех сторон треугольника называется его ***периметром.*** Угол A лежит против стороны BC (угол A, противолежащий стороне BC) (рис. 1.28). Аналогично, $\angle B$ лежит против стороны AC, а $\angle C$ – против стороны AB. Углы, вершины которых находятся на концах отрезка, содержащего сторону треугольника, называются прилежащими к данной стороне. Например, углы A и B являются прилежащими к стороне AB.

Два отрезка называются ***равными,*** если они имеют одинаковую длину. Два угла называются ***равными,*** если они имеют одинаковую градусную меру. Треугольники называются ***равными,*** если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон. На рисунке 1.29 мы видим два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Равенство треугольников обозначают так: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. При этом имеет значение порядок, в котором записывают вер-

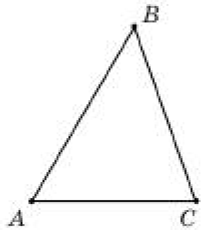


Рис. 1.28

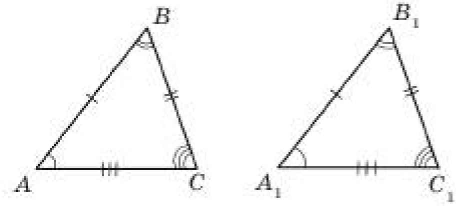


Рис. 1.29

шины треугольника. Например, равенство $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ означает, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = C_1$, а равенство $\Delta ABC = \Delta B_1A_1C_1$ означает, что $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Пример 1. $\Delta ABC = \Delta PQR$ и $AB = 10$ см, $\angle C = 90°$. Найти $\angle R$ и длину PQ.

Решение. Так как $\Delta ABC = \Delta PQR$, то $AB = PQ$ и $\angle C = \angle R$. Значит, $PQ = 10$ см, $\angle R = 90°$.

1.3.2. Существование треугольника, равного данному.

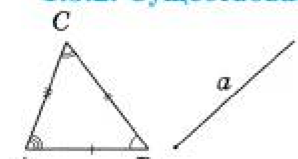


Рис. 1.30

Пусть даны ΔABC и луч a (рис. 1.30). Переместим треугольник ABC так, чтобы его вершина A совместилась с началом луча a, вершина B лежала на луче a, а вершина C оказалась в заданной полуплоскости относительно луча a и его дополнения.

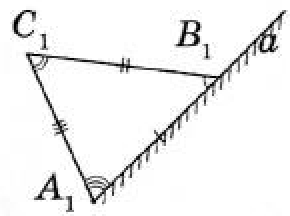


Рис. 1.31

Вершины перемещенного треугольника обозначим A_1, B_1, C_1 (рис. 1.31). Тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Здесь считается, что треугольник ABC *совмещен* с треугольником $A_1B_1C_1$ с помощью перемещения (движения). В целом, с помощью движения можно совместить как равные отрезки, так и равные углы (аксиомы VI и VII).

Существование треугольника $A_1B_1C_1$, равного треугольнику ABC и расположенного указанным образом относительно заданного луча a, мы отнесем к числу ***основных свойств*** (аксиом) простейших фигур. Формулировка этого свойства дана ниже.

VIII. ***Для любого треугольника существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.***

1.3.3. Параллельные прямые. Две прямые плоскости называются ***параллельными,*** если они не пересекаются. Если прямые a и b параллельны, то их обозначают так: $a \parallel b$ (рис. 1.32).

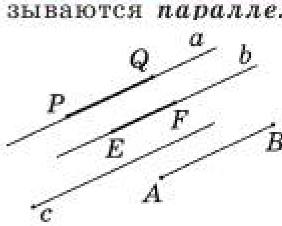


Рис. 1.32

Наряду с параллельными прямыми часто рассматривают параллельные отрезки. Два отрезка называются *параллельными,* если они лежат на параллельных прямых. На рисунке 1.32 отрезки

PQ и EF параллельны. Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой, луча и прямой, отрезка и луча, двух лучей (рис. 1.32).

Аксиома параллельных прямых выражается нижеследующим свойством.

IX. ***Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.***

Теорема. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Доказательство. Пусть $a \| b$ и $a \cap c = A$ (рис. 1.33).

Если бы прямые b и c не пересекались, то через точку A проходили бы две прямые a и c, не пересекающие b. Это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, прямая c, пересекая прямую a, должна пересекать и параллельную ей прямую b. Теорема доказана.

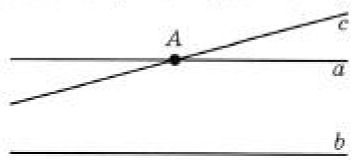


Рис. 1.33

?

1. Что такое треугольник?
2. Что такое угол треугольника при данной вершине?
3. Какие отрезки называются равными?
4. Какие углы называются равными?
5. Что означает равенство $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$?
6. Дайте определение параллельных прямых. Какие два отрезка называются параллельными?
7. Сформулируйте аксиому параллельных прямых.
8. Докажите, что прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и другую.

ПЗ

1. Назовите несколько практических способов построения параллельных прямых.
2. Постройте на глаз два равных треугольника. Проверьте точность построения измерительными инструментами.
3. Назовите несколько примеров параллельных прямых или отрезков, взятых из окружающей вас среды.

Упражнения

А

1.47. На стороне AB треугольника взята точка D. Найдите сторону AB треугольника, если $AD = 5$ см, $BD = 6$ см.

1.48. $\Delta ABC = \Delta PQR$, $AB = 5$ см, $BC = 6$ см и $AC = 7$ см. Найдите стороны треугольника PQR.

1.49. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = 40^\circ$, $\angle B_1 = 60^\circ$, $\angle C_1 = 80^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

1.50. Треугольники ABC, PQR и XYZ равны. Известно, что $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $XZ = 7$ см. Найдите остальные стороны каждого треугольника (рис. 1.34).

1.51. $\Delta ABC = \Delta MNP$. 1) Найдите сторону BC и угол C, если $NP = 12$ см, $\angle P = 12^\circ 1'$. 2) Могут ли быть равными стороны AB и BC в треугольнике ABC, если все стороны треугольника MNP имеют разные длины?

1.52. $\Delta ABC = \Delta QPT$, причем $\angle B = 17^\circ 35'$, $QT = 23$ см.

1) Могут ли быть равными все углы треугольника ABC, если два угла треугольника QPT имеют различные градусные меры? 2) Найдите AC и угол P.

1.53 Дан треугольник ABC. Сколько прямых, параллельных стороне AB, можно провести через вершину C?

B

1.54. Дан треугольник ABC. Существует ли другой, равный ему треугольник ABD?

1.55. Прямая a параллельна стороне AB треугольника ABC. Докажите, что прямые BC и AC пересекают прямую a.

1.56. Может ли прямая, не проходящая через вершину треугольника, пересекать каждую его сторону? Обоснуйте ответ.

1.57. $\Delta ABC = \Delta SKT$. $AB = 17$ дм, $\angle K = 70^\circ 18'$. 1) Найдите угол B и сторону SK. 2) Может ли периметр треугольника SKT быть больше периметра треугольника ABC?

1.58. $\Delta ABC = \Delta SKT$. 1) Найдите AC и $\angle K$, если $\angle B = 121^\circ 15'$, $ST = 16$ дм. 2) Может ли отношение периметров данных треугольников быть равным двум?

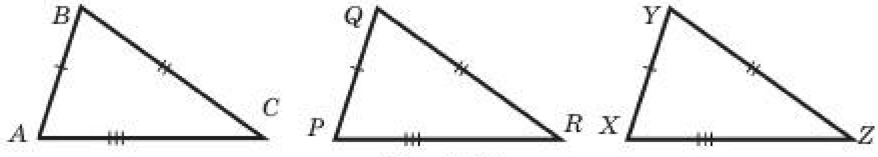


Рис. 1.34

C

1.59. Дан треугольник ABC. Прямая m параллельна прямой AD, $D \in BC$, $P \in AB$, $Q \in AC$ и $PQ \parallel BC$. Докажите, что прямая m пересекает прямые AB, AC, BC, PD, PQ и QD (рис. 1.35).

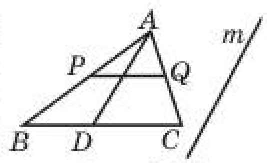


Рис. 1.35

1.60. Дан треугольник ABC. На стороне AC взята точка B_1, а на стороне BC – точка A_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются.

1.61. $\Delta ABC = \Delta B_1A_1C_1$, причем $\angle B_1 = 15°$, $B_1C_1 = 5$ м. 1) Найдите AC и угол A_1. 2) Может ли периметр треугольника $B_1A_1C_1$ быть больше, чем $2A_1B_1 + AC$, если в треугольнике ABC сторона AB равна стороне BC?

1.62. $\Delta ABC = \Delta C_1A_1B_1$. 1) Найдите B_1A_1 и $\angle C$, если $\angle B_1 = 60°$, $BC = 8$ м. 2) Может ли периметр треугольника ABC быть равным $2AC + 3B_1C_1$, если известно, что все его стороны равны?

1.63. Докажите, что две различные прямые либо пересекаются, либо параллельны.

1.64. Через точку, не лежащую на прямой a, проведены три прямые. Докажите, что, по крайней мере, две из них пересекают прямую a.

1.65. Дано: $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$. Докажите, что $a \parallel d$.

1.66. Населенные пункты A, B и C расположены вдоль прямолинейной трассы. Как располагаются эти населенные пункты, если расстояние между населенными пунктами A и B равно 32 км, между B и C – 18 км, а между A и C – 14 км?

1.4. Смежные и вертикальные углы

1.4.1. Смежные и вертикальные углы. Два угла называются ***смежными,*** если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами. На рисунке 1.36 углы AOB и BOC – смежные. Так как дополнительные лучи OA и OC образуют развернутый угол, то $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°$. Т.е. мы доказали теорему, данную ниже.

Теорема. ***Сумма смежных углов равна 180°.***

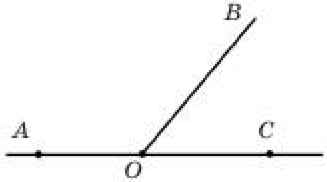


Рис. 1.36

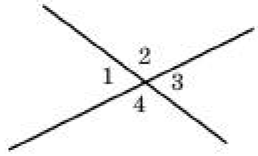


Рис. 1.37

Два угла называются ***вертикальными,*** если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого. На рисунке 1.37 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 являются вертикальными.

По свойству смежных углов

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \quad \Rightarrow \quad \angle 1 = 180^\circ - \angle 2;$

$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ, \quad \Rightarrow \quad \angle 3 = 180^\circ - \angle 2.$

Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, т.е. ***вертикальные углы равны.***

Напомним, что угол, равный 90°, называется прямым углом. Угол, меньший 90°, называется острым углом, а угол, больший 90° и меньший 180°, называется тупым (рис. 1.38). Так как сумма смежных углов равна 180°, то угол, смежный с острым углом, тупой и, обратно, угол, смежный с тупым углом, острый. Угол, смежный с прямым углом, тоже прямой угол.

Рис. 1.38

Пример 1. Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.

Решение. Обозначим меру меньшего из углов через x. Тогда мера второго угла равна $2x$ и их сумма равна 180°, т.е. $x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$. Значит, смежные углы равны 60° и 120°.

1.4.2. Перпендикулярные прямые. Пусть прямые a и b пересекаются в точке A. Тогда получим 4 неразвернутых угла. Если один из них прямой, то все остальные углы также прямые. В этом случае мы говорим, что ***прямые пересекаются под прямым углом.***

Определение. ***Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом*** (рис. 1.39). Перпендикулярность прямых обозначают

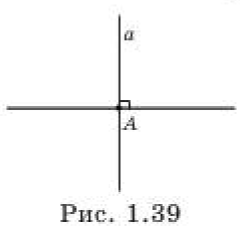


Рис. 1.39

символом $\perp$. Запись $a \perp b$ читается так: «Прямая a перпендикулярна прямой b».

Теорема. ***Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.***

Доказательство. Пусть $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$, причем точка A лежит между точками B и C (рис. 1.40). Построим угол CAD, равный 90°, так, чтобы луч AC являлся стороной этого угла. Тогда прямая AD перпендикулярна прямой a.

Допустим, что существует другая прямая AD_1, перпендикулярная прямой a. Тогда $\angle CAD = 90^\circ$ и $\angle CAD_1 = 90^\circ$, они отложены в одну полуплоскость от прямой AC. Но по аксиоме VII об откладывании углов, в данную полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90°. Поэтому не существует другой прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a. Теорема доказана.

Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной прямой, один из онцов которого является точкой пересечения прямых. Эта точка пересечения прямых называется ***основанием перпендикуляра***. На рисунке 1.41 перпендикуляр AB проведен из точки A к прямой a. Точка B – основание перпендикуляра.

1.4.3. Биссектриса угла. ***Биссектрисой*** угла называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам. На рисунке 1.42 луч AD исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам: $\angle BAD = \angle DAC = \dfrac{\angle BAC}{2}$.

Пример 2. Докажем, что биссектриса угла образует с его сторонами углы, которые не больше 90°.

Решение. Градусная мера каждого угла не больше 180°. Поэтому половина каждого угла не больше 90°.

1.4.4. Метод доказательства теорем от противного. В геометрии, вообще в математике, часто применяют метод доказательства теоремы от противного. С этим методом доказательства вы познакомились в процессе доказательства теоремы в пункте 1.4.2. Теперь глубже вникнем в значение и суть этого метода.

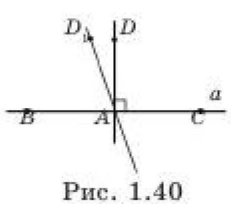


Рис. 1.40

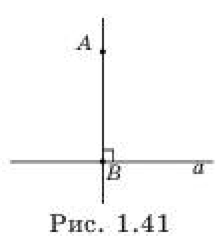


Рис. 1.41

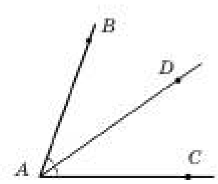


Рис. 1.42

Во введении было отмечено, что каждую теорему можно символически записать так: $A \Rightarrow B$, где A – условие теоремы, а B – заключение теоремы. Предложение, обратное по смыслу предложению B, обозначают через $\overline{B}$. Суть доказательства методом от противного такова: считается, что выполняется условие теоремы – предложение A, а в качестве заключения (следствия) берется не предложение B, а предложение $\overline{B}$, обратное предложению B, т. е. предполагаем, что выполняется утверждение $A \Rightarrow \overline{B}$. Затем путем рассуждений, опираясь на аксиомы и доказанные ранее теоремы, приходим к выводу, противоречащему либо условию теоремы, либо одной из аксиом, либо известной ранее теореме.

Вообще, по принципу составления умозаключений только одно из двух предложений B и $\overline{B}$ является истинным. Поэтому полученное противоречие дает основание утверждать, что наше предложение (выполнение утверждения $A \Rightarrow$) было неверным, а значит, верно утверждение $A \Rightarrow B$.

В доказанной теореме дана прямая a и лежащая на ней точка A. Это условие теоремы обозначим через A. Через B обозначим заключение теоремы: «Через точку A можно провести только одну прямую, перпендикулярную прямой a». Итак, это утверждение кратко запишем так: $A \Rightarrow B$. Теперь запишем предложение $\overline{B}$, обратное предложению B. Суть предложения $\overline{B}$ такова: если в предложении B через точку $A \in a$ к прямой a проведена только одна прямая, перпендикулярная ей, то предложение $\overline{B}$, обратное предложению B, следует записать так: «Через точку A прямой a проходят по меньшей мере две прямые, перпендикулярные ей». Тогда из-за предположения, что утверждение $A \Rightarrow \overline{B}$ является истинным, мы пришли к выводу, противоречащему аксиоме об откладывании угла, равного данному. Ибо предположение истинности обратного утверждения означает, что в одной полуплоскости от прямой a можно отложить два разных угла, градусные меры которых равны 90°. Но это невозможно, т. е. утверждение $A \Rightarrow \overline{B}$ ошибочно. Значит, доказано утверждение $A \Rightarrow B$.

?

1. Какие углы называются смежными?
2. Докажите, что сумма смежных углов равна 180°.
3. Докажите, что если два угла равны, то смежные с ними углы также равны.
4. Какой угол называется прямым, острым, тупым?
5. Докажите, что угол, смежный с прямым, есть прямой угол.
6. Какие углы называются вертикальными?
7. Докажите, что вертикальные углы равны.

8. Какие прямые называются перпендикулярными? Какой символ используется для обозначения перпендикулярности прямых?
9. Какой отрезок называется перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной прямой?
10. Дайте определение биссектрисы угла.

ПЗ

1. Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них начертите смежный угол.
2. Начертите угол, равный 70°, и с помощью транспортира проведите его биссектрису.
3. Из точки A вне прямой a, не параллельной к линиям тетради в клетку, на глаз опустите перпендикуляр. Результат проверьте с помощью транспортира.

Упражнения

А

1.67. Найдите углы, смежные с углами 30°, 45°, 60°, 90°.

1.68. Могут ли смежные углы быть оба: 1) острыми; 2) тупыми; 3) прямыми? Обоснуйте ответ.

1.69. Найдите смежные углы, если один из них в 2 раза больше другого.

1.70. Найдите смежные углы, если: 1) один из них на 30° больше другого; 2) их разность равна 40°; 3) один из них в 3 раза меньше другого; 4) они равны.

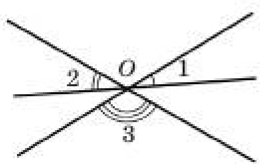


Рис. 1.43

1.71. Найдите угол, смежный с углом ABC, если: 1)$\angle ABC = 111^\circ$; 2) $\angle ABC = 90^\circ$; 3)$\angle ABC = 15^\circ$.

1.72. На рисунке 1.43 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

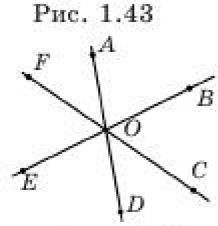


Рис. 1.44

1.73. На рисунке 1.44 $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle FOE = 70^\circ$. Найдите углы AOC, BOD, COE и COD.

1.74. Докажите, что если при пересечении двух прямых один из углов прямой, то остальные три угла – тоже прямые.

1.75. На рисунке 1.45 луч OV является биссектрисой угла ZOY, а луч OU – биссектрисой угла XOY. Найдите угол XOZ, если $\angle UOV = 80^\circ$.

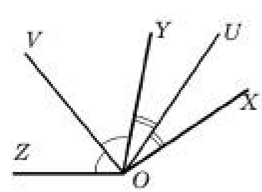


Рис. 1.45

1.76. Луч p является биссектрисой неразвернутого угла (ab). Может ли угол (ap) быть прямым; тупым?

1.77. Найдите углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если сумма трех из этих углов равна 270°.

1.78. Докажите, что если три из четырех углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равны между собой, то прямые перпендикулярны.

B

1.79. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как: 1) 2:3; 2) 3:7; 3) 11:25; 4) 22:23.

1.80. Чему равен угол, если два смежных с ним угла составляют в сумме 100°?

1.81. Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 50°. Найдите эти углы.

1.82. Один из углов, образованный при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

1.83. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, на 50° меньше другого. Найдите эти углы.

1.84. Найдите угол между биссектрисами смежных углов (рис. 1.46).

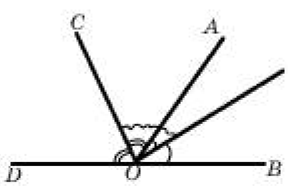


Рис. 1.46

1.85. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

1.86. Найдите угол между биссектрисой и продолжением одной из сторон данного угла, равного: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150°.

C

1.87. Известно, что $\angle AOB = 35^\circ$, $\angle BOC = 50^\circ$. Найдите угол AOC. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

1.88. Угол (ab) равен 120°, угол (ac) равен 150°. Найдите угол (bc). Для каждого случая сделайте чертеж.

1.89. Докажите, что если луч исходит из вершины угла и образует с его сторонами равные острые углы, то он является биссектрисой угла.

1.90. Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

1.91. Даны три луча a, b, c с общим началом. Известно, что $\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 120^\circ$. 1) Проходит ли какой-нибудь из этих лучей между сторонами угла, образованного двумя другими лучами? 2) Может ли прямая, не проходящая через начало данных лучей, пересекать все три данных луча?

1.92. $\Delta ABC = \Delta PQR$, $\angle R = 55^\circ$ и $AB = 12$ см. Найдите:
1) $\angle C$ и PQ; 2) может ли периметр ΔABC быть больше периметра ΔPQR на 6 см?

Раздел 2. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

2.1. Признаки равенства треугольников

2.1.1. Первый признак равенства треугольников.

Теорема 1. (Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.) ***Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $\angle A=\angle A_1$ (рис. 2.1). Докажем, что $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

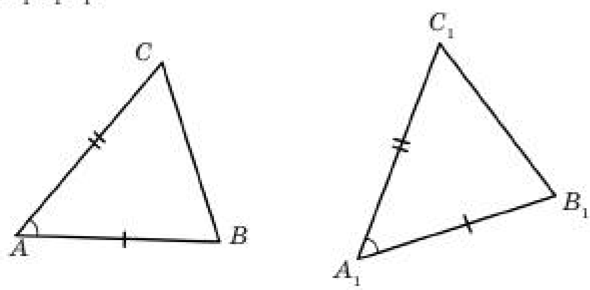


Рис. 2.1

Так как $\angle A=\angle A_1$, то треугольник $A_1B_1C_1$ можно наложить на треугольник ABC так, что вершина A_1 совпадает с вершиной A, а лучи A_1B_1 и A_1C_1 – с лучами AB и AC соответственно.

По аксиоме VIII о существовании треугольника, равного данному, такое наложение возможно единственным образом. Так как $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, то сторона AB совпадает со стороной A_1B_1, а сторона AC – со стороной A_1C_1, т.е. точки B_1 и B, C_1 и C совпадут. Следовательно, совпадут стороны B_1C_1 и BC. Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC полностью совпадут. Значит, они равны. Теорема доказана.

Доказанная теорема выражает признак (равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними), по которому можно сделать вывод о равенстве треугольников.

2.1.2. Второй признак равенства треугольников.

Теорема 2. (Признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам.) ***Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне***

и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$ (рис. 2.2). Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник $A_1B_1C_1$ можно наложить на треугольник ABC так, что вершина A_1 совпадет с вершиной A, а луч A_1B_1 совпадет с лучом AB и вершина C_1 будет находиться в той же полуплоскости, что и вершина C по отношению к прямой AB. Так как $AB=A_1B_1$, то вершина B_1 совпадет с вершиной B. Поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то луч A_1C_1 совпадет с лучом AC и луч B_1C_1 совпадет с лучом BC. Отсюда следует, что вершина C_1 совпадет с вершиной C. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, т.е. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Пример 1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если AC =10 м?

Решение. Так как $\angle AOC = \angle BOD$ (как вертикальные) и $AO = BO$, $CO = DO$ (т.к. точка O – середина AB и CD), то по I признаку равенства треугольников $\Delta AOC = \Delta BOD$. Поэтому $BD = AC = 10$ м (рис. 2.3).

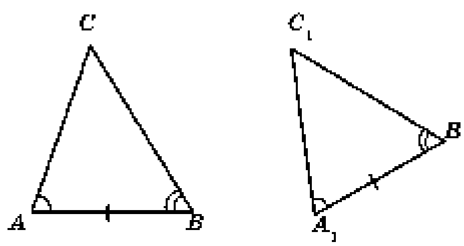


Рис. 2.2

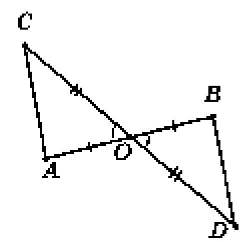


Рис. 2.3

?

1. Сформулируйте и докажите I признак равенства треугольников. Какие аксиомы используются при доказательстве теоремы?
2. Сформулируйте и докажите II признак равенства треугольников.
3. Периметр одного из двух треугольников больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

ПЗ

1. С помощью транспортира и линейки начертите треугольник ABC, в котором:
   1) AB = 4,3 см, AC = 2,3 см, $\angle A=23^{\circ}$;
   2) BC = 9 см, AB = 6,2 см, $\angle B = 122^{\circ}$;

3) $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 90^\circ$.

2. С помощью транспортира и линейки начертите треугольник ABC, в котором:
   1) $AB = 5$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 50^\circ$;
   2) $AB = 6{,}2$ см, $\angle B = 62^\circ$, $\angle C = 48^\circ$.

Упражнения

А

2.1. Отрезки AE и DC пересекаются в точке B, являющейся серединой каждого из них.1) Докажите, что $\Delta ABC = \Delta BED$. 2) Найдите $\angle A$ и $\angle C$ треугольника ABC, если в треугольнике BDE $\angle D = 47^\circ$, $\angle E = 42^\circ$.

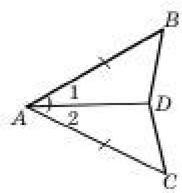


Рис. 2.4

2.2. На рисунке 2.4 $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. 1) Докажите, что $\Delta ABD = \Delta ACD$. 2) Найдите BD и AB, если $AC = 15$ см, $DC = 5$ см.

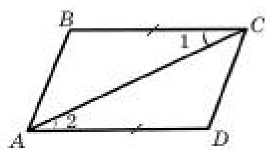


Рис. 2.5

2.3. На рисунке 2.5 $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. 1) Докажите, что $\Delta ABC = \Delta CDA$; 2) Найдите AB и BC, если $AD = 17$см, $DC = 14$ см.

2.4. 1) На рисунке 2.6 $\angle 1 = \angle 2$ и $DC = CE$. Докажите, что $BC = AC$; 2) На рисунке 2.7 $\Delta ADB = \Delta CBD$. Докажите, что $AB = CD$ и $BC = AD$.

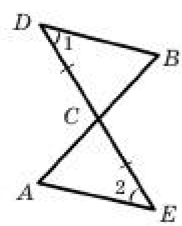


Рис. 2.6

2.5. 1) На рисунке 2.8 $FO = OL$, $\angle EFO = \angle OLK$. Докажите, что $EF = KL$; 2) На рисунке 2.9 $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ACB = \angle ACD$. Докажите, что $AB = AD$.

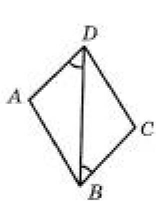


Рис. 2.7

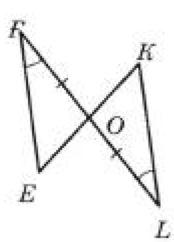


Рис. 2.8

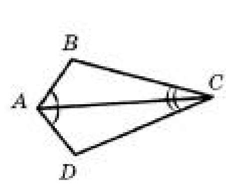


Рис. 2.9

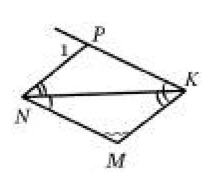


Рис. 2.10

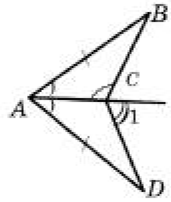


Рис. 2.11

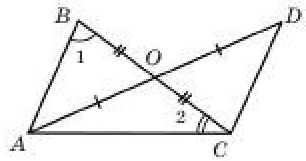


Рис. 2.12

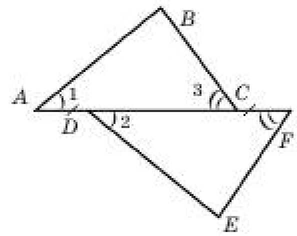


Рис. 2.13

B

2.6. На рисунке 2.10 $\angle MNK = \angle PKN$, $\angle PNK = \angle MKN$, $\angle NMK = 137^\circ$. Найдите $\angle 1$.

2.7. На рисунке 2.11 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ACB = 121^\circ$. Найдите $\angle 1$.

2.8. На рисунке 2.12 $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74^\circ$, $\angle 2 = 36^\circ$. 1) Докажите, что $\Delta AOB = \Delta DOC$; 2) Найдите $\angle ACD$.

2.9. Отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta CDA$.

2.10. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\Delta BPC = \Delta B_1P_1C_1$.

2.11. В треугольнике CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC, а точка E – на отрезке AD, причем $\angle ACD = \angle ADC$, $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

2.12. Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые AC и BD так, что $\angle ABD = \angle BAC$, и через середину O отрезка AB проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках C и D. Найдите расстояние AC, если $BD = 8$ см.

2.13. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OC$ и $BO = DO$. Докажите, что $\angle ABD = \angle BDC$.

2.14. Отрезки равной длины AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OD$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta DCB$.

C

2.15. На рисунке 2.13 $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta DEF$.

2.16. Отрезки равной длины AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = = OC$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$ и $\angle BAD = \angle BCD$.

2.17. 1) На рисунке 2.14 $\angle DAC = \angle DBC$, $AK = KB$. Докажите, что $\angle DAB = \angle CBA$. 2) Точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB так, что $\angle ABC = \angle ABD$, $BD = BC$. Докажите, что AB – биссектриса угла DAC.

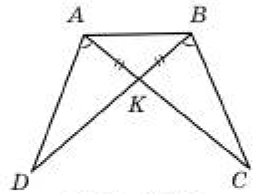


Рис. 2.14

2.18. 1) На рисунке 2.15 $\angle HKM = \angle MNH$, $KO = ON$. Докажите, что $\angle HKN = \angle KNM$. 2) Точки M и E расположены по разные стороны от прямой OP так, что $OM = PE$ и $\angle MPO = \angle POE$. Докажите, что $\angle MOE = \angle EPM$ и $\Delta MPE = \Delta EOM$.

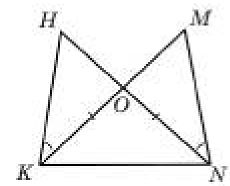


Рис. 2.15

2.19. Как измерить на местности расстояние между пунктами A и B, между которыми нельзя пройти по прямой (рис. 2.16)? Примените I и II признаки равенства треугольников.

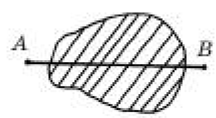


Рис. 2.16

2.1.3. Высота, биссектриса, медиана, средняя линия треугольника.

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, проходящей через противоположную сторону треугольника. На рисунке 2.17 основание H высоты BH лежит на стороне AC, а на рисунке 2.18 основание H высоты лежит на продолжении стороны AC треугольника ABC.

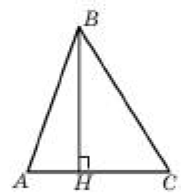


Рис. 2.17

Биссектрисой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне. На рисунке 2.19 AD – биссектриса.

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны треугольника. На рисунке 2.20 BD – медиана.

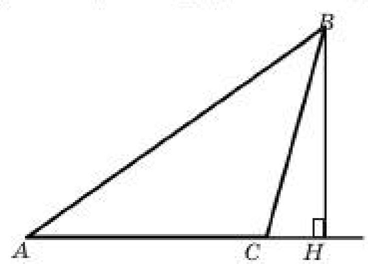


Рис. 2.18

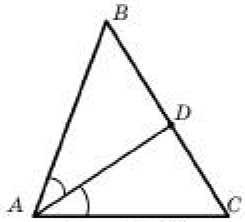


Рис. 2.19

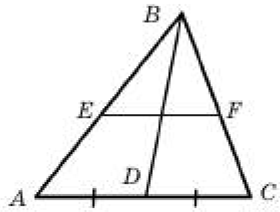


Рис. 2.20

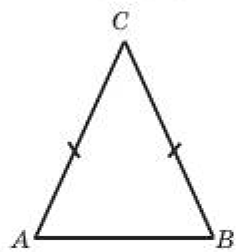


Рис. 2.21

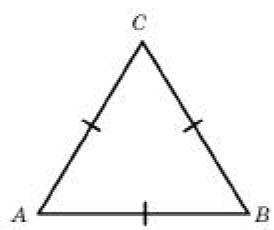


Рис. 2.22

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. На рисунке 2.20 EF – средняя линия.

2.1.4. Свойства равнобедренного треугольника. Понятие *обратная теорема.*

Треугольник называется ***равнобедренным,*** если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются ***боковыми сторонами,*** а третья сторона называется ***основанием треугольника.*** На рисунке 2.21 изображен равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = BC$ – боковые стороны, AB – основание.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется ***равносторонним.*** На рисунке 2.22 изображен равностороний треугольник ABC, в котором $AB = AC = BC$.

Теорема 3. ***В равнобедренном треугольнике бисссектриса, проведенная к основанию, является и медианой, и высотой.***

Доказательство. Пусть отрезок CD является биссектрисой равнобедренного треугольника ABC, проведенной к его основанию AB (рис. 2.23). Нужно показать, что CD является и медианой, и высотой треугольника ABC.

Действительно, так как CD является биссектрисой, то $\angle ACD = \angle BCD$, а так как ΔABC – равнобедренный, то $AC = BC$. К тому же отрезок CD является общей стороной треугольников ACD и BCD. Тогда $\Delta ACD = \Delta BCD$ (по первому признаку равенства треугольников). Поэтому $AD = BD$, т.е. CD является медианой и $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$ (как равные смежные углы), т. е. $CD \perp AB$. Следовательно, CD является и высотой. Теорема доказана.

Теорема 4. 1) ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.***

2) ***Обратно, если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.***

Доказательство. 1) Пусть ΔABC – равнобедренный, т.е. $AC = BC$. Докажем, что $\angle A = \angle B$ (рис. 2.23).

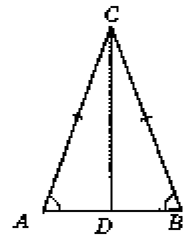


Рис. 2.23

Рассмотрим биссектрису CD, проведенную из вершины C к основанию AB. Тогда из равенства $\Delta ACD = \Delta BCD$, показанного в доказательстве теоремы 3, вытекает равенство $\angle A = \angle B$.

2) Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \angle B$ (рис. 2.23). Покажем, что ΔABC – равнобедренный.

По второму признаку равенства треугольников $\Delta ABC = = \Delta BAC$, так как $\angle A = \angle B, \angle B = \angle A, AB = BA$. Здесь в записях ΔABC и ΔBAC изменен порядок вершин. Поэтому сторона AC в ΔABC соответствует стороне BC в ΔBAC, и сторона BC в ΔABC соответствует стороне AC в ΔBAC. В общем случае ΔABC и ΔBAC разные. Поэтому основание AB треугольника ABC соответствует основанию BA треугольника BAC.

Итак, из равенства $\Delta ABC = \Delta BAC$ вытекает равенство $AC = = BC$. Теорема доказана.

Теорема 4 состоит из двух теорем (утверждений): теоремы 1) и теоремы 2). Теорема 2) называется ***обратной*** теореме 1). Смысл сказанного следует понимать так: условие теоремы 1) («треугольник равнобедренный») является заключением теоремы 2). А условие теоремы 2) («в треугольнике два угла равны», или «в треугольнике углы при основании равны») является заключением теоремы 2). Другими словами, через А обозначим утверждение о том, что «треугольник равнобедренный», а через В обозначим утверждение о том, что «в треугольнике два угла равны», или «в треугольнике углы при основании равны». Тогда теорему 1) можно записать в виде: А$\Leftrightarrow$В, а теорему 2) – в виде: В$\Rightarrow$А. Во многих случаях, объединяя подобные два предложения, записывают так: А$\Leftrightarrow$В. Эта запись читается следующим образом: «***Для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы углы при его основании были равны***».

Не всякая теорема имеет обратную теорему, т.е. если данная теорема верна, то обратное ей утверждение не всегда может быть верным. Например, рассмотрим теорему: «Сумма смежных углов равна 180°». Обратное этому утверждение записывается так: «Если сумма двух углов равна 180°, то эти углы смежные». Очевидно, что последнее утверждение не верно, ибо не все углы, сумма которых равна 180°, являются смежными. Для того чтобы такие углы были смежными, необходимо также, чтобы они имели общую сторону и общую вершину.

Пример 2. Докажем, что у равностороннего треугольника все углы равны.

Решение. Пусть ΔABC – данный равносторонний треугольник: $AB = AC = BC$. Так как $AB = AC$, то ΔABC – равнобедренный с основанием BC. Тогда по теореме 3 $\angle B = \angle C$.

Также, поскольку $AB = BC$, то ΔABC – равнобедренный с основанием AC и поэтому $\angle A = \angle C$. Следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C$ (рис. 2.22).

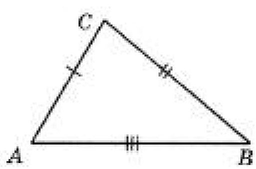
2.1.5. Третий признак равенства треугольников.

Теорема 5. ***(Признак равенства треугольников по трем сторонам.) Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ такие, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ можно доказать, предполагая, что $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$. Тогда $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $C \neq \angle C_1$. Иначе эти треугольники были бы равны по I признаку. Предположим, что треугольник $A_1B_1C_2$ равен треугольнику ABC, у которого вершина C_2 лежит в одной полуплоскости с вершиной C_1 относительно прямой A_1B_1 (рис. 2.24).

Пусть D – середина отрезка C_1C_2. Тре-угольники $A_1C_1C_2$ и $B_1C_1C_2$ равнобедренные с общим основанием C_1C_2. Поэтому их медианы A_1D и B_1D являются высотами. Значит, прямые A_1D и B_1D перпендикулярны прямой C_1C_2. Прямые A_1D и B_1D не совпадают, так как точки A_1,B_1, D не лежат на одной прямой. Но через точку D к прямой C_1C_2 можно провести только одну перпендикулярную прямую. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.



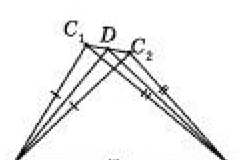


Рис. 2.24

Пример 3. Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, такие, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Решение. Построим треугольник CBD, равный треугольнику CBA, и треугольник $C_1B_1D_1$, равный треугольнику $C_1B_1A_1$ (рис. 2.25).

Так как $\angle C = \angle C_1 = 90°$, то точки A, C, D и A_1, C_1, D_1 лежат соответственно на прямых AD и A_1D_1. Поэтому $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ (по III признаку равенства треугольников), т.к. $AB = A_1B_1$, $AD = AC + CD = 2 \cdot AC = 2 \times \times A_1C_1 = A_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1$ и $BD = = AB = A_1B_1 = B_1D_1$. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$. Тогда по I признаку равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, т.к. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

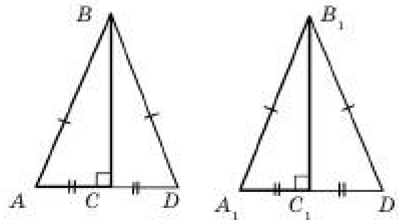


Рис. 2.25

?

1. Какой треугольник называется равнобедренным? Какие стороны называются боковыми сторонами равнобедренного треугольника? Какая сторона называется основанием?
2. Какой треугольник называется равносторонним?
3. Что такое высота треугольника?
4. Что такое биссектриса треугольника?
5. Что такое медиана треугольника?

ПЗ

1. Начертите треугольник. С помощью линейки отметьте середины сторон и проведите медианы треугольника.
2. Начертите треугольник. С помощью транспортира и линейки проведите его биссектрисы.
3. Начертите треугольник ABC с тремя острыми углами и треугольник MNP, у которого угол M – тупой. С помощью угольника проведите высоты каждого треугольника.
4. Начертите три равнобедренных треугольника так, чтобы угол, лежащий против основания, был:
1) острым; 2) прямым; 3) тупым.

Задачи

A

2.20. Основание равнобедренного треугольника равно 5 см, а боковая сторона равна 6 см. Найдите периметр.

2.21. Периметр равнобедренного треугольника равен 12 см, а боковая сторона равна 5 см. Найдите основание.

2.22. В треугольниках ABC и PQR $AB=PQ$, $AC= =PR$ и $BC=QR$, $\angle Q = 50^\circ$. Найдите $\angle B$.

2.23. В треугольниках MNK и PQR $MN=PQ$, $MK= PR$ и $NK=QR$, $\angle M=60$. Найдите смежный угол при вершине P.

2.24. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причем $AD = BC$, $AB = CD$ и $\angle ABC = 75°$. Найдите $\angle ADC$ (рис. 2.26).

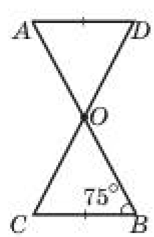


Рис. 2.26

2.25. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона равна 2 м. Найдите основание.

2.26. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если: 1) основание на 3 м меньше боковой стороны; 2) основание на 3 м больше боковой стороны.

2.27. Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.

2.28. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC $\angle B = 40^\circ$. Найдите смежный угол при вершине C.

В

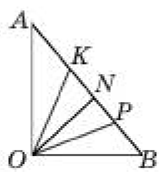


Рис. 2.27

2.29. ON – биссектриса прямого угла AOB, OK и OP – биссектрисы углов AON и NOB. Найдите угол KOP (рис. 2.27).

2.30. Точки A и C лежат по разные стороны от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны. 1) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CDB$. 2) Найдите $\angle ABC$, если $\angle ADB = 44^\circ$.

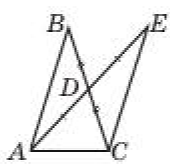


Рис. 2.28

2.31. Медиана AD треугольника ABC продолжена за сторону BC. На продолжении медианы DE взята точка E так, что $DE = AD$, и точка E соединена с точкой C. 1) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$. 2) Найдите $\angle ACE$, если $\angle ACD = 56^\circ$, $\angle ABD = 40^\circ$ (рис. 2.28).

2.32. В равнобедренном треугольнике основание в два раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите стороны треугольника.

2.33. Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника BDC равен 45 см. Найдите стороны AB и BC.

2.34. Через середину C отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная отрезку AB. Докажите, что каждая точка этой прямой одинаково удалена от точек A и B.

2.35. Отрезки AB и PQ пересекаются так, что $AP = AQ$ и $BP = BQ$. Докажите, что луч AB является биссектрисой угла PAQ.

2.36. Используя условие задачи 2.35, докажите, что $AB \perp PQ$.

2.37. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC на медиане AD отмечена точка E. Докажите, что: 1) $\triangle ABE = \triangle AEC$; 2) $\triangle BED = \triangle CED$.

2.38. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причем $CO = BO$ и $\angle ACO = \angle DBO$. Докажите, что $\triangle ACO = \triangle DBO$.

2.39. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $\Delta ACO = \Delta BDO$, если $AO = BO$ и $\angle CAO = \angle DBO$.

2.40. В треугольнике ABC $AB = BC$ и BD – биссектриса. Найдите: 1) $\angle BCA$, если смежный угол при вершине A равен 130°; 2) периметр треугольника ABC, если $AB = 5$ см, $AD = 2$ см.

2.41. Докажите, что в равностороннем треугольнике: 1) все три угла равны; 2) все три медианы равны.

C

2.42. AN является медианой равнобедреннего треугольника ABC с основанием BC. Найдите AN, если периметр треугольника ABC равен 32 см, а периметр треугольника ABN равен 24 см.

2.43. Треугольники PRQ и PKQ расположены так, что имеют общую сторону PQ, а вершины R и K находятся по разные стороны относительно прямой PQ. Докажите, что луч PQ является биссектрисой угла KPR, если $PR = PK$, $QR = QK$ (рис. 2.29).

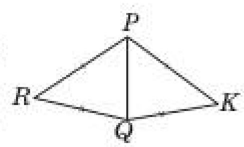


Рис. 2.29

2.44. AB является общим основанием равнобедренных треугольников ABC и ABD, а вершины C и D находятся по разные стороны от прямой AB. Покажите, что отрезки AB и CD перпендикулярны.

2.45. Докажите, что треугольник – равнобедренный, если: 1) его медиана является и высотой; 2) его высота является и биссектрисой.

2.46. Докажите, что в каждом равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны.

2.47. Докажите, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, а против большей стороны – больший угол.

2.48. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. На сторонах AB и CB отмечены соответственно точки E и F так, что $AE = CF$. Докажите, что: 1) $\Delta BDE = \Delta BDF$; 2) $\Delta ADE = \Delta CDF$.

2.49. Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если равны их основания и высоты, проведенные к основаниям.

2.50. Треугольники ACC_1 и BCC_1 равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CC_1. Докажите, что треугольники ABC и ABC_1 – равнобедренные.

2.51*. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

Раздел 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

3.1. Признаки параллельности прямых

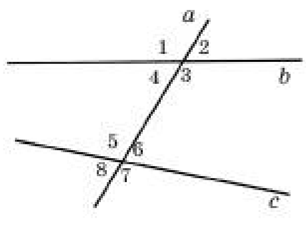


Рис. 3.1

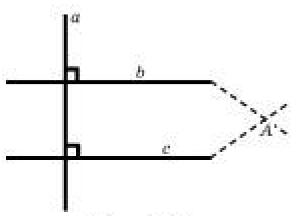


Рис. 3.2

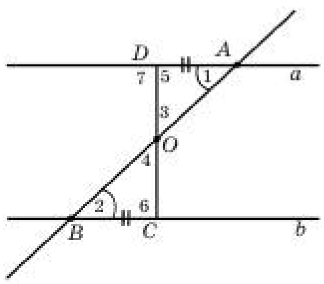


Рис. 3.3

3.1.1. Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей.

Пусть прямая a пересекается с двумя прямыми b и c (рис. 3.1). Здесь прямая a называется ***секущей*** по отношению к прямым b и c. Пары углов, которые образуются при пересечении прямых b и c секущей a, имеют специальные названия.

На рисунке 3.1 пары углов 3 и 6, 4 и 5 называются ***внутренними односторонними.***

Пары углов 3 и 5, 4 и 6 называются ***внутренними накрест лежащими.***

Пары углов 1 и 5, 2 и 6, 4 и 8, 3 и 7 называются ***соответственными.***

Теорема 1. ***Если $a \perp b$ и $a \perp c$, то $b \parallel c$.***

Доказательство. Допустим, что $b \nparallel c$. Тогда существует точка $A = b \cap c$ (рис. 3.2). Значит, из точки A опущены два перпендикуляра AB и AC к прямой a. Это противоречие показывает, что $B = C$. Здесь $B = a \cap b$, $C = a \cap c$. Теорема доказана.

Существуют три признака параллельности двух прямых.

Теорема 2. ***(Признаки параллельности прямых.) Если при пересечении двух прямых секущей: 1) равны внутренние накрест лежащие углы; 2) равны соответственные углы; 3) сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то эти прямые параллельны.***

Доказательство. 1) Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.3). Докажем, что $a \parallel b$. Если углы 1 и 2 прямые, то $a \parallel b$ (теорема 1). Расмотрим случай, когда углы 1 и 2 не прямые. Через середину O отрезка AB проведем прямую a, перпендикулярную прямой a. Пусть D – основание этого перпендикуляра. $OD \cap b = C$. Точки D и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Так как $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ и $OA = OB$, то по II признаку равенства треугольников $\Delta OAD = \Delta OBC$. Следовательно, $\angle 6 = \angle 5 = \angle 7 = 90^\circ$, т.е. точки D, O, C лежат на одной прямой и $DC \perp a$, $DC \perp b$. Тогда $a \| b$ (теорема 1).

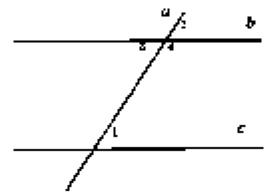


Рис. 3.4

2) Пусть $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.4). Докажем, что $b \| c$. Углы 2 и 3 равны как вертикальные углы. Тогда $\angle 3 = \angle 1$, т.е.внутренние накрест лежащие углы равны. Поэтому $b \| c$ (по первому утверждению данной теоремы).

3) Пусть $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ (рис. 3.4). Покажем, что $b \| c$. Углы 3 и 4 являются смежными, поэтому $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$. Тогда $\angle 1 = \angle 3$, т.е. накрест лежащие углы равны. Поэтому $b \| c$ (по первому утверждению данной теоремы). Теорема доказана.

Утверждения 1), 2), 3) доказанной теоремы называются соответственно I, II и III признаками параллельности прямых. Также справедливы обратные утверждения.

Теорема 3. ***(Обратная теорема.) При пересечении двух параллельных прямых секущей: 1) равны внутренние накрест лежащие углы; 2) равны соответственные углы; 3) сумма внутренних односторонних углов равна 180°.***

Доказательство. 1) Пусть $a \| b$, AB – секущая (рис. 3.5). Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

Предположим, что $\angle 1 \neq \angle 2$. Тогда в той полуплоскости, где расположен угол 1 относительно прямой AB, построим угол CAB, равный углу 2. По I признаку параллельности $AC \| b$ (так как $\angle CAB = \angle 2$ по построению). А по условию теоремы $a \| b$ и получается, что через точку A проходят две прямые (a и AC), параллельные прямой b. Это противоречит аксиоме параллельных прямых. Полученное противоречие отрицает наше предположение о том, что $\angle 1 \neq \angle 2$, т.е. $\angle 1 = \angle 2$.

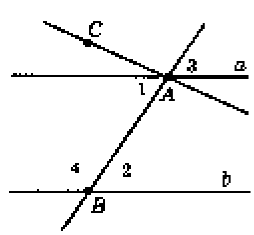


Рис. 3.5

2) Если $a \| b$, то по доказанному $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.5). Углы 1 и 3 равны как вертикальные углы. Следовательно, $\angle 2 = \angle 3$, т.е. соответственные углы равны.

3) Если $a \| b$, то по доказанному утверждению 1) $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.5). Так как $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные углы, то $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$. Следовательно, $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. Теорема доказана.

3.1.2. Сумма углов треугольника.

Теорема 4. ***Сумма углов треугольника равна 180°.***

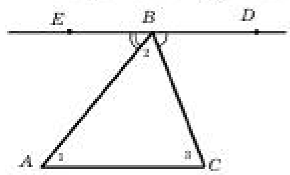


Рис. 3.6

Доказательство. Пусть дан ΔABC. Через вершину B проведем прямую DE, параллельную AC. Тогда $\angle 1 = \angle ABE$ и $\angle 3 = \angle CBD$ (рис. 3.6).

С другой стороны, $\angle ABE + \angle 2 + \angle CBD = 180^\circ$, как развернутый угол. Но $\angle 1 = \angle ABE$, $\angle 3 = \angle CBD$. Поэтому $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Теорема доказана.

Пример 1. Может ли треугольник иметь два тупых угла?

Решение. Сумма двух тупых углов больше, чем 180°, поэтому треугольник не может иметь 2 тупых угла.

Пример 2. Докажем, что угол равностороннего треугольника равен 60°.

Решение. Если ΔABC является равносторонним, то $\angle A = \angle B = \angle C$ и $\angle A + \angle B + \angle C = 3\angle A = 180^\circ$. Отсюда $\angle A = 60^\circ$.

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине. На рисунке 3.7 угол BCD – внешний угол треугольника ACB при вершине C.

Так как $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, то $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$.

Так же $\angle C + \angle BCD = 180^\circ$, как смежные. Поэтому $\angle BCD = 180^\circ - \angle C$. Отсюда: $\angle A + \angle B = \angle BCD$, т.е. мы доказали теорему, данную ниже.

Теорема 5. ***Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.***

3.1.3. Прямоугольный треугольник. Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол. Сумма двух других углов прямоугольного треугольника равна 90°. Сторона треугольника, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*, а две другие стороны – *катетами* (рис. 3.8).

В прямоугольных треугольниках мы имеем один общий элемент – прямой угол. Поэтому признаки равенства тре-

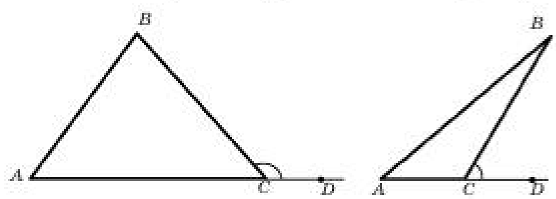


Рис. 3.7

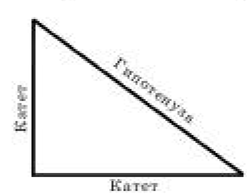


Рис. 3.8

угольников для прямоугольных треугольников можно переформулировать так:

I признак. *Если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие прямоугольные треугольники равны.*

II признак. *Если катет и прилежащий острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему острому углу другого, то такие прямоугольные треугольники равны.*

III признак. *Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие прямоугольные треугольники равны.*

IV признак. *Если катет и гипотенуза одного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого, то такие прямоугольные треугольники равны.*

I признак равенства прямоугольных треугольников является следствием I признака равенства треугольников. II и III признаки равенства прямоугольных треугольников непосредственно следуют из II признака равенства треугольников.

Теорема 6. ***В прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ и $\angle B = 30^\circ$. Построим прямоугольный треугольник BCD, равный треугольнику ABC так, как показано на рисунке 3.9. Пусть $\angle CBD = 30^\circ$. Тогда в треугольнике ABD все углы равны 60°, поэтому $\Delta\ ABD$ равносторонний. Так как

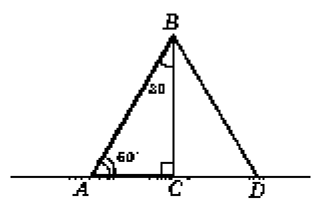


Рис. 3.9

$$AC = \frac{1}{2}AD \text{ и } AD = AB\text{, то } AC = \frac{1}{2}AB.$$ Теорема доказана.

Введем еще несколько важных понятий, связанных с прямоугольным треугольником. Если ΔABC прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), то BC является перпендикуляром, проведенным из точки B к прямой AC (рис. 3.9). Гипотенузу AB называют еще *наклонной*, проведенной из точки B к прямой AC. Катет AC называется *проекцией наклонной AB* на прямую AC. Поскольку в прямоугольных треугольниках прямой угол – наибольший из его углов, то и гипотенуза больше любого его катета. Тогда перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь

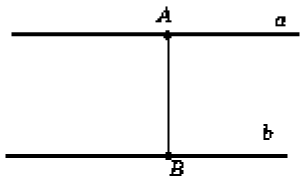


Рис. 3.10

Рис. 3.11

точки к прямой, короче наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой. Проекция наклонной всегда меньше самой наклонной.

Под расстоянием от точки B до прямой AC подразумевают длину перпендикуляра BC. Вообще, под ***расстоянием между двумя фигурами*** понимают расстояние между ближайшими точками этих фигур (если такие точки существуют). Например, на рисунке 3.10 расстояние между параллельными прямыми a и b есть длина их общего перпендикуляра AB. На рисунке 3.11 расстояние от точки C до отрезка AB равно длине отрезка BC.

И

Как мы отмечали в предисловии, все аксиомы являются наглядно очевидными и не вызывают сомнений. Само слово «аксиома» происходит от греческого слова «аксиос», что означает «ценный, достойный».

Евклид
(III в. до н.э.)

Н. И. Лобачевский – русский математик (1792 – 1856)

Геометрия в ранний период своего развития достигла особенно высокого уровня в Египте. В первом тысячелетии до нашей эры геометрические сведения от египтян перешли к грекам. За период с VII по III век до нашей эры греческие геометры не только обогатили геометрию многочисленными новыми теоремами, но сделали также серьезные шаги к строгому ее обоснованию. Многовековая работа греческих геометров была подытожена и систематизирована Евклидом в его знаменитом труде «Начала». В этом труде изложение геометрии построено на системе аксиом. В системе аксиом Евклида содержится V постулат (аналог аксиомы), из которого следует, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Аксиома параллельных прямых в отличие от других аксиом не подкрепляется наглядными соображениями. Скажем, через точку A вне прямой a проходит прямая b, параллельная прямой

a. Возникает вопрос: «Можно ли через точку A провести еще одну прямую, параллельную прямой a?». Нам представляется, что если прямую b «повернуть» даже на очень малый угол вокруг точки A, то она пересечет прямую a (см. рис. 3.12).

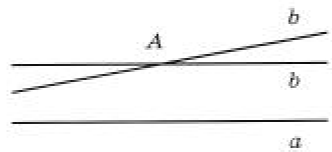


Рис. 3.12

Во многом из-за сложной формулировки V постулата со времен Евклида математики многих стран пытались доказать его как теорему, т.е. вывести его из других аксиом. Однако эти попытки каждый раз оказывались неудачными. И лишь в прошлом веке было окончательно выяснено, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, не может быть доказано на основе остальных аксиом Евклида, а само является аксиомой. Огромную роль в решении этого вопроса сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский.

?

1. Какие углы называются внутренними односторонними, накрест лежащими углами?
2. Какие углы называются соответственными?
3. Сформулируйте и докажите 3 признака параллельности прямых.
4. Чему равна сумма внутренних углов треугольника?
5. Какие углы называются внешними углами треугольника?
6. Какие треугольники называются прямоугольными? Назовите их элементы.
7. Сформулируйте все признаки равенства прямоугольных треугольников.
8. Что такое наклонная и проекция?
9. Что означает понятие *расстояние между фигурами*?

ПЗ

Начертите прямую a и возьмите точку A вне этой прямой. Найдите расстояние от точки A до прямой a.

Упражнения

А

3.1. $\angle ABC = 80°$, $\angle BCD = 110°$. Могут ли прямые AB и CD быть: 1) параллельными; 2) пересекающимися?

3.2. Ответьте на вопрос упражнения 3.1, если $\angle ABC = 65^\circ$ и $\angle BCD = 105^\circ$.

3.3. Разность двух внутренних односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 50°. Найдите эти углы.

3.4. Разность двух внутренних односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 30°. Найдите эти углы.

3.5. Сумма двух внутренних накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 150°. Чему равны эти углы?

3.6. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 72°. Найдите остальные семь углов.

3.7. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 30°. Может ли один из остальных семи углов равняться 70°?

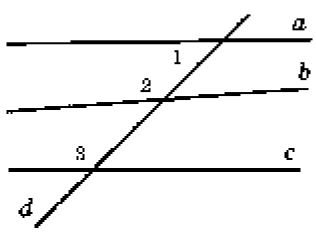


Рис. 3.13

3.8. Сумма накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 210°. Найдите эти углы.

3.9. На рисунке 3.13 прямые a, b и c пересечены секущей d. $\angle 1 = 42^\circ$, $\angle 2 = 140^\circ$, $\angle 3 = 138^\circ$. Какие из прямых a, b и c параллельны?

3.10. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c, если: 1) один из углов равен 150°; 2) один из углов на 70° больше другого.

3.11. Найдите углы прямоугольного равнобедренного треугольника.

3.12. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 32$ см. Найдите AC.

3.13. Сумма внешних углов треугольника ABC при вершинах A и B, взятых по одному для каждой вершины, равна 240°. Найдите угол C.

3.14. У треугольника один из внутренних углов равен 30°, а один из внешних углов равен 40°. Найдите остальные внутренние углы треугольника.

3.15. Найдите неизвестный угол треугольника, если два других угла равны: 1) 50° и 30°; 2) 40° и 75°; 3) 60° и 80°; 4) 25° и 120°.

3.16. Найдите внешний угол при третьей вершине треугольника, если два других угла равны: 1) 54° и 36°; 2) 42° и 78°; 3) 65° и 35°; 4) 33° и 120°.

3.17. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: 1) 40°; 2) 60°; 3) 100°.

B

3.18. Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b. Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D. Докажите, что $CO = OD$.

3.19. Прямая a пересекает отрезок AB в точке O, являющейся серединой отрезка AB. Докажите, что точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от прямой a.

3.20. По данным рисунка 3.14 найдите угол 1.

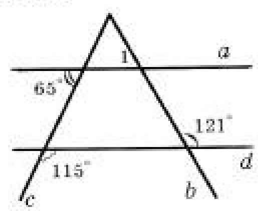


Рис. 3.14

3.21. Под каким углом пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов при пересечении параллельных прямых секущей?

3.22. Углы треугольника пропорциональны числам 3, 8, 5. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

3.23. Один из углов треугольника на 30° больше другого и на 30° меньше третьего угла. Найдите все углы этого треугольника.

3.24. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C = 50°$.

3.25. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке N. Найдите $\angle ANB$, если $\angle A = 58°$, $\angle B = 96°$.

3.26. В треугольнике ABC $AB = 18$см, $\angle B = 30°$, $\angle C = 90°$. Найдите: 1) расстояние от точки A до прямой BC; 2) длину проекции наклонной AB на прямую AC.

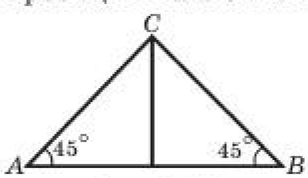


Рис. 3.15

3.27. В треугольнике ABC $\angle A = \angle B = 45°$ и $AB = 19$ см.

Найдите: 1) расстояние от точки C до прямой AB; 2) длину проекции отрезка AC на прямую AB (рис. 3.15).

3.28. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

3.29. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен $115°$. Найдите углы треугольника.

3.30. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 110°$.

3.31. Найдите углы прямоугольного треугольника, если его высота, проведенная из вершины прямого угла, образует с катетом угол $50°$.

3.32. Докажите, что биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника пересекаются под углом $45°$.

3.33. Найдите углы прямоугольного треугольника, если биссектрисы двух его углов пересекаются под углом $70°$.

C

3.34. В треугольнике ABC медиана AD равна половине стороны BC. Докажите, что ΔABC – прямоугольный.

3.35. Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

3.36. Докажите, что если при пересечении двух прямых a и b секущей накрест лежащие углы не равны, то прямые a и b пересекаются.

3.37. Треугольник ABC и точки P и Q такие, что середина отрезка BP совпадает с серединой стороны AC, а сере-

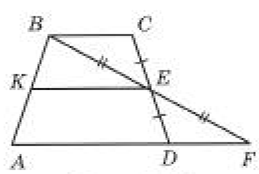


Рис. 3.16

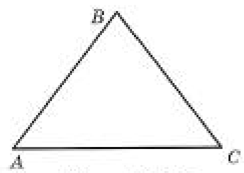


Рис. 3.17

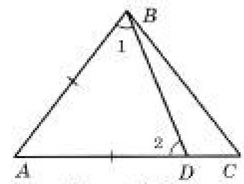


Рис. 3.18

дина отрезка CQ – с серединой стороны AB. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

3.38. Из точки D, лежащей на биссектрисе угла B, опущены перпендикуляры DA и DC на стороны угла. Докажите, что $DA = DC$.

3.39. Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы равны или в сумме составляют 180°.

3.40. На рисунке 3.16 $CE = ED$, $BE = EF$ и $KE \| AD$. Докажите, что $KE \| BC$.

3.41. Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC перпендикулярно AD, пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $KD \| AB$.

3.42. Могут ли биссектрисы двух углов прямоугольного треугольника пересекаться под углом 40°?

3.43*. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению, приведенному в примере 2 на стр 42.

3.2. Соотношения между сторонами и углами треугольника

3.2.1. Соотношения между сторонами и углами треугольника.

Теорема 1. ***В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и, обратно, против большего угла лежит большая сторона.***

Доказательство. 1) Пусть в треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB (рис. 3.17). Докажем, что $\angle B > \angle C$. Отложим на стороне AC отрезок AD, равный стороне AB (рис. 3.18). Так как $AD < AC$, то точка D лежит между точками A и C, т.е. луч BD проходит между сторонами угла B. Поэтому $\angle 1$ является частью угла B. Значит, $\angle 1 < \angle$. Так как $\angle 2$ является внешним углом треугольника BDC, то $\angle 2 = \angle C + \angle DBC$, т.е. $\angle 2 > \angle C$. Поскольку ΔABD – равнобедренный, то $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно, имеем: $\angle B > \angle 1 = \angle 2 > \angle C \Rightarrow \angle B > \angle C$.

2) Пусть в треугольнике ABC $\angle B > \angle C$. Докажем, что $AC > AB$. Предположим, что это не так. Тогда либо $AC = AB$, либо $AC < AB$. Если предположить, что $AC = AB$, то ΔABC – равнобедренный. Следовательно, $\angle B = \angle C$, что противоречит неравенству $\angle B > \angle C$. Если $AC < AB$, то по доказанному имеем неравенство $\angle B < \angle C$, которое также противоречит неравенству $\angle B > \angle C$. Следовательно, наше предположение не верно, т.е. верно неравенство $AC > AB$.

Теорема доказана.

Пример 1. Покажем, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Действительно, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет – против острого. Поскольку прямой угол больше острого, то по доказанной теореме гипотенуза больше катета.

3.2.2. Неравенства треугольника.

Теорема 2. ***Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.***

Доказательство. Пусть дан произвольный треугольник ABC. Покажем, что

$$AB < AC + BC. \quad (1)$$

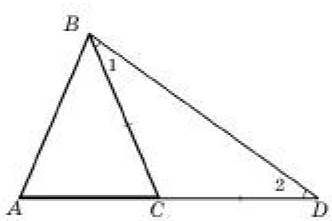


Рис. 3.19

Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB (рис. 3.19). В равнобедренном треугольнике BCD $\angle 1 = \angle 2$, а в треугольнике ABD $\angle ABD > \angle 1 = \angle 2$. Тогда по теореме 1 выполняется неравенство $AB < AD$. Но $AD = AC + CD$ и $CD = BC$. Поэтому $AB < AC + BC$. Теорема доказана.

Заметим, что неравенство (1) выполняется для любой стороны треугольника, т.е. верны неравенства:

$$\begin{aligned} &AB < AC + BC, \\ &AC < AB + BC, \\ &BC < AB + AC. \end{aligned} \quad 2)$$

Эти неравенства называются ***неравенствами треугольника.***

Пример 2. Покажем, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Действительно, из неравенств треугольника (2) имеем:

$$BC > AB - AC,\ AB > AC - BC,\ AC > BC - AB.$$

?

1. Докажите теорему 1– теорему о соотношениях между сторонами и углами треугольника.
2. Покажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.
3. Сформулируйте и докажите неравенства треугольника.
4. Покажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

ПЗ

Начертите треугольник с неравными сторонами. С помощью измерительной линейки проверьте справедливость теорем 1 и 2.

Упражнения

А

3.44. В треугольнике ABC $BC > AC > AB$. Какой из углов больше: 1) угол B или угол A; 2) угол C или угол A?

3.45. Существует ли треугольник со сторонами, равными: 1) 2 см, 3 см и 5 см; 2) 2,1 дм, 2 дм и 4 дм; 3) 4 м, 3 м и 6 м?

3.46. Сравните стороны треугольника ABC, если: 1) $\angle A > \angle B > \angle C$; 2) $\angle A = \angle B < \angle C$.

3.47. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см. Сравните углы A, B и C.

3.48. Какой вид имеет треугольник, если известно, что: 1) два угла равны между собой; 2) три угла равны между собой?

3.49. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6 см. Может ли его основание быть равным 15 см?

3.50. Могут ли стороны треугольника относиться как: 1) 2 : 3 : 4; 2) 2 : 3 : 5?

В

3.51. Какой вид имеет треугольник, в котором больший угол меньше суммы двух других углов?

3.52. Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: 1) 2 см и 5 см; 2) 21 см и 9 см; 3) 6 дм и 3 дм.

3.53. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 20 см, а другая – 10 см. Какая из них является основанием?

3.54. В треугольнике ABC угол B равен $70°$. Биссектриса этого угла пересекает сторону AC в точке D. $BD = DC$. Докажите, что $AB < AC$.

3.55. Точка D лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что отрезок AD меньше боковой стороны этого треугольника.

3.56. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC, в котором $\angle C = 108°$, $BD = 4{,}3$ см, $AB < 6$ см. Найдите сторону AB, если известно, что ее длина выражена целым числом.

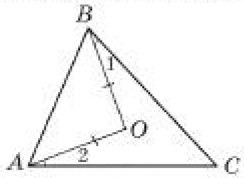


Рис. 3.20

3.57. На рисунке 3.20 $AO = BO$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AC = BC$.

3.58. В треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $AD = CE$ и $AE = CD$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

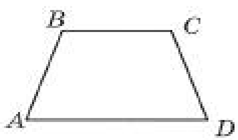


Рис. 3.21

3.59. Докажите, что $AD < AB + BC + CD$ (рис. 3.21).

3.60. Периметр равнобедренного треугольника равен 50 см, а одна из его сторон равна 10 см. Найдите длину других сторон треугольника.

C

3.61. Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведенной из той же вершины.

3.62. Периметр равнобедренного треугольника равен 36 см, разность двух сторон равна 6 см, а один из его внешних углов острый. Найдите стороны треугольника.

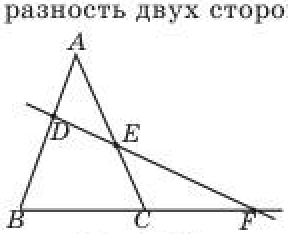


Рис. 3.22

3.63. Прямая пересекает две боковые стороны AB и AC равнобедренного треугольника ABC в точках D и E соответственно, а луч BC в точке F. Докажите, что $AE > AD$ (рис. 3.22).

3.64. Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Периметр треугольника равен 74 см, а одна из сторон равна 16 см. Найдите две другие стороны треугольника.

3.65. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке O, в которой каждый из них делится пополам. Докажите, что

$$AO < \frac{AC + AD}{2}.$$

Раздел 4. ОКРУЖНОСТЬ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

4.1. Окружность

4.1.1. Окружность. ***Окружностью*** называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется ***центром*** окружности.

Расстояние от центра окружности до какой-либо ее точки называется ***радиусом*** окружности, т.е. это отрезок, соединяющий центр окружности с ее какой-либо точкой (рис. 4.1). Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр, называется ***диаметром*** окружности (рис. 4.1).

Каждый диаметр состоит из двух радиусов, поэтому его длина вдвое больше длины радиуса, т.е. $d = 2\ r$. Окружность с центром в точке O и радиуса r обозначают так: $\omega(O;\ r)$.

Окружность каждой парой точек, принадлежащих ей, делится на две части. Каждую из частей окружности называют ***дугой*** этой окружности. Например, на рисунке 4.1 окружность точками A и B делится на две части. В малой части окружности лежит точка C, а в большей части – точка D. Поэтому эти дуги соответственно обозначаются через $\smile ADB$ и $\smile ACB$.

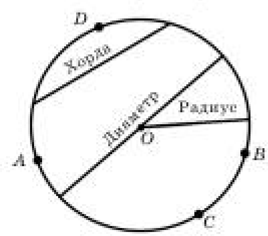


Рис. 4.1

Прямая и окружность могут иметь две общие точки, одну общую точку и не иметь общих точек (рис. 4.2). Прямую, которая имеет одну общую точку с окружностью, называют ***касательной*** к окружности. Эта точка называется ***точкой касания***. Итак, имеются три случая взаимного расположения прямой a и окружности $\omega(O;\ r)$: 1) Прямая a пересекает окружность $\omega(O;\ r)$ в двух точках A и B (рис. 4.2, а).

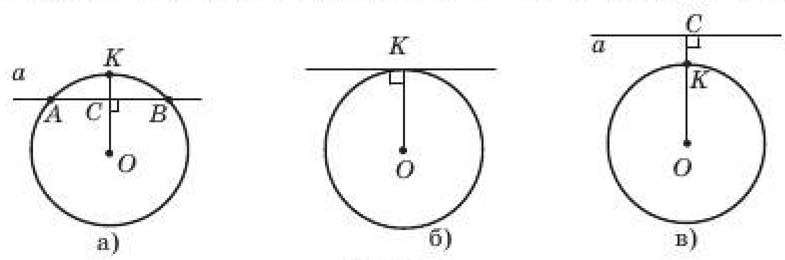


Рис. 4.2

При этом расстояние OC от центра O до прямой a меньше радиуса $r(OC<r)$; 2) Прямая a касается окружности $\omega(O;\ r)$ (рис. 4.2, б), расстояние OK от центра O до прямой a равно радиусу $r(OK=r)$; 3) Прямая a не пересекается с окружностью $\omega(O;\ r)$ (рис. 4.2, в), расстояние OC от центра O до прямой a больше радиуса r $(OC>r)$.

Точка касания лежит на окружности, поэтому она удалена от центра на расстояние, равное длине радиуса окружности. Все другие точки касательной находятся вне окружности. Поэтому длина OK является расстоянием от центра O до касательной a, т.е. $OK \perp a$. Значит, ***касательная к окружности перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания.***

Теорема 1. ***Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей.***

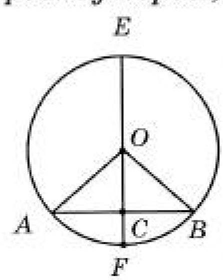


Рис. 4.3

Доказательство. Пусть точка C – середина хорды AB и прямая OC пересечет окружность в точках E и F (рис. 4.3). Покажем, что $EF \perp AB$.

ΔABO – равнобедренный, так как OA и OB – радиусы окружности, OC – его медиана. Тогда по свойству медианы равнобедренного треугольника OC является и высотой треугольника AOB, т.е. $OC \perp AB$. Следовательно, $EF \perp AB$. Теорема доказана.

4.1.2. Окружность, описанная около треугольника. Окружность называется ***описанной около треугольника***, если она проходит через все его вершины.

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно ему, называют ***серединным перпендикуляром*** данного отрезка. Серединные перпендикуляры любых двух сторон треугольника пересекаются. В противном случае эти стороны треугольника были бы параллельными.

Теорема 2. ***Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.***

Доказательство. Пусть около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O. Стороны треугольника ABC являются хордами этой окружности. По теореме 1 серединные

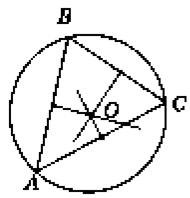


Рис. 4.4

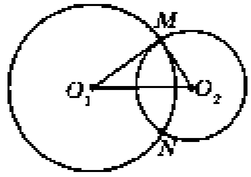


Рис. 4.5

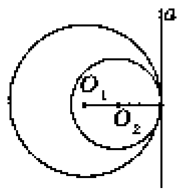


Рис. 4.6

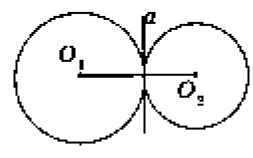


Рис. 4.7

перпендикуляры этих сторон проходят через диаметры окружности, и все эти диаметры пересекаются в центре окружности (рис. 4.4). Теорема доказана.

Также две окружности $\omega(O_1;\ r_1)$ и $\omega(O_2;\ r_2)$ могут иметь две общие точки (рис. 4.5), одну общую точку (рис. 4.6, 4.7) и не иметь общих точек (рис. 4.8, 4.9). Пусть $r_1 > r_2$.

Если окружности $\omega(O_1;\ r_1)$ и $\omega(O_2;\ r_2)$ пересекаются в двух точках, то выполняются неравенства:

$$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2.$$

Действительно, из треугольника O_1O_2M имеем неравенство $O_1O_2 < O_1M + O_2M$, а $O_1M + O_2M = r_1 + r_2$. Также из этого треугольника получаем неравенство $O_1M < O_1O_2 + O_2M$, т.е. $r_1 < O_1O_2 + r_2$. Поэтому $r_1 - r_2 < O_1O_2$.

Если окружности $\omega(O_1;\ r_1)$ и $\omega\ (O_2;\ r_2)$ имеют только одну общую точку A, то прямая a, проходящая через точку A перпендикулярно прямой O_1O_2, является общей касательной данных окружностей (как прямая, перпендикулярная радиусу и имеющая только одну общую точку с соответствующей окружностью).

Если две окружности имеют общую касательную, то говорят, что эти окружности касаются друг друга. Касание окружностей называется ***внутренним***, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной (рис. 4.6) и при этом выполняется равенство

$$O_1O_2 = r_1 - r_2.$$

Касание окружностей называется ***внешним***, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной (рис. 4.7) и при этом выполняется равенство

$$O_1O_2 = r_1 + r_2.$$

Если окружности $\omega(O_1;\ r_1)$ и $\omega(O_2;\ r_2)$ не имеют общих точек, то одна из них будет лежать вне другой (рис. 4.8), либо

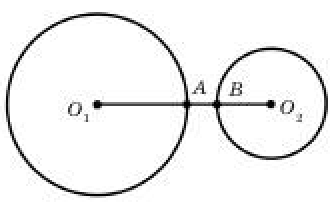


Рис. 4.8

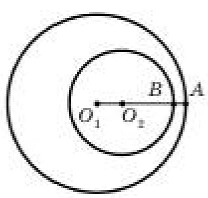


Рис. 4.9

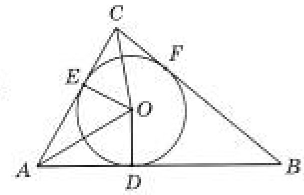


Рис. 4.10

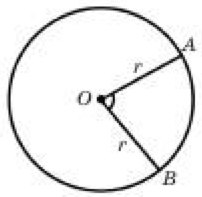


Рис. 4.11

окружность $\omega(O_2;\ r_2)$ целиком лежит внутри окружности $\omega(O_1;\ r_1)$ (рис. 4.9).

В первом случае выполняется неравенство $O_1O_2>r_1+r_2$. Говорят, что окружность $\omega(O_2;\ r_2)$ лежит вне окружности $\omega(O_1;\ r_1)$ (или, наоборот, окружность $\omega(O_1;\ r_1)$ лежит вне окружности $\omega(O_2;\ r_2)$).

Во втором случае верно неравенство $O_1O_2<r_1-r_2$. Говорят, что окружность $\omega(O_2;\ r_2)$ лежит внутри окружности $\omega(O_1;\ r_1)$.

4.1.3. Окружность, вписанная в треугольник. Окружность называется ***вписанной в треугольник,*** если она касается всех его сторон (рис. 4.10).

Теорема 3. ***Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.***

Доказательство. Пусть в треугольник ABC вписана окружность с центром O; D, E и F − точки касания окружности со сторонами треугольника (рис. 4.10). $\Delta AOD = \Delta AOE$, так как AO − общая гипотенуза и OD и OE − катеты, равные радиусу окружности. Тогда $\angle OAD = \angle OAE$, т.е. центр вписанной окружности O лежит на биссектрисе AO. Теорема доказана.

Точно так же доказывается, что центр O лежит на двух других биссектрисах треугольника.

Пусть дана окружность $\omega(O;\ r)$. Отметим на этой окружности точки A и B. Угол AOB, образованный радиусами OA и OB, называется центральным углом этой окружности (рис. 4.11). Градусная мера угла центрального AOB называется градусной мерой дуги окружности AB, т.е. величина $\smile AB$ измеряется градусной мерой центрального угла AOB. Заметим, что точки A и B делят окружность на две части. Из этих частей в качестве дуги AB рассматривается та, которая ограничена центральным углом AOB. При этом говорят, что хорда AB стягивает дугу AB. Очевидно, что равные хорды стягивают равные дуги. (Докажите это утверждение самостоятельно, применяя признаки равенства треугольников.)

?

1. Что такое окружность, центр окружности, радиус?
2. Что такое хорда окружности? Какая хорда называется диаметром?
3. Какая окружность называется описанной около треугольника?
4. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
5. Какая прямая называется касательной к окружности?
6. Что значит «окружности касаются друг друга»?
7. Какое касание окружностей называется внешним, какое – внутренним?
8. Какая окружность называется вписанной в треугольник?
9. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.

ПЗ

С помощью монеты или какого-либо другого шаблона начертите окружность и постройте на глаз ее центр. Попробуйте указать методы нахождения точного места центра окружности (в случае, если центр не указан).

Упражнения

А

4.1. Радиус окружности равен 2,5 см. Найдите ее диаметр. Может ли ее хорда быть равной 6 см?

4.2. Докажите, что хорда окружности, не проходящая через центр, меньше диаметра.

4.3. Даны окружность и отрезок. Постройте хорду, равную данному отрезку.

4.4. Дана окружность с центром O. Точка A является внутренней точкой этой окружности. В скольких точках пересекает окружность: 1) прямая OA; 2) луч OA; 3) отрезок OA?

4.5. Окружности с радиусами 30 см и 40 см касаются друг друга. Найдите расстояние между центрами окружностей в случаях внешнего и внутреннего касаний (рис. 4.12).

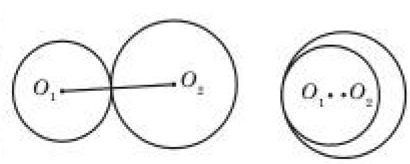


Рис. 4.12

4.6. Могут ли касаться две окружности, если их радиусы равны 25 см и 50 см, а расстояние между центрами равно 60 см?

4.7. Сколько различных касательных можно провести к окружности через данную точку, лежащую: 1) вне окружности; 2) на окружности; 3) внутри окружности?

4.8. Может ли окружность касаться прямой в двух точках?

4.9. Как расположены две окружности $\omega(O_1;\ r_1)$ и $\omega\ (O_2;\ r_2)$, у которых: 1) $r_1 = 6$ см, $r_2 = 15$ см, $O_1O_2 = 21$ см; 2) $r_1 = 12$ см, $r_2 = 14$ см, $O_1O_2 = 8$ см; 3) $r_1 = 6$ см, $r_2 = 5$ см, $O_1O_2 = 18$ см?

4.10. Как расположена прямая относительно окружности, если диаметр окружности равен 16 см, а расстояние от центра до прямой равно: 1) 7 см; 2) 8 см; 3) 9 см?

4.11. Точки A, B и C делят окружность на три равные дуги $\smile AB$, $\smile BC$ и $\smile CA$. Чему равна градусная мера этих дуг?

B

4.12. Через точку A, не лежащую на окружности, к этой окружности проведите касательные AB и AC. Точки B и C – точки касания. Докажите, что $AB = AC$.

4.13. Из точки данной окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

4.14. Из точки данной окружности проведены две хорды, равные радиусу. Найдите угол между ними.

4.15. Радиусы двух окружностей равны 3 см и 4 см, а расстояние между их центрами равно 5 см. Имеют ли эти окружности общие точки?

4.16. Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что: 1) $\Delta OAO_1 = \Delta OBO_1$; 2) ΔOAB и ΔO_1AB – равнобедренные (рис. 4.13).

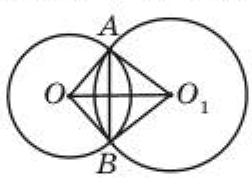


Рис. 4.13

4.17. Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Каждая из этих окружностей проходит через центр другой. Найдите углы AOB и OAO_1.

4.18. Одна окружность описана около равностороннего треугольника, а другая вписана в него. Докажите, что центры этих окружностей совпадают.

4.19. Окружности с радиусами 80 см и 60 см касаются друг друга. Найдите расстояние между центрами окружностей в случаях внешнего и внутреннего касаний.

4.20. Каждая из трех окружностей проходит через центры двух других. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.

4.21. Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от центра.

4.22. Докажите, что если хорды равноудалены от центра окружности, то они равны.

4.23. Как построить к окружности касательную: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно данной прямой?

4.24. Какие углы образует хорда AB, равная радиусу окружности, с касательной в точке A?

4.25. Найдите углы, под которыми пересекаются прямые, касающиеся окружности в концах хорды, равной радиусу.

4.26. Две окружности радиуса 4 см и 6 см имеют общий центр (их называют концентрическими окружностями). Найдите расстояние между наиболее удаленными точками этих окружностей.

4.27. Чему равна величина центрального угла AOB, если дуга AB равна $\frac{1}{6}$ окружности?

4.28. Какова градусная мера $\frac{1}{15}$ дуги центрального угла, равного $90°$?

C

4.29. Как разделить пополам дугу окружности, если центр этой окружности не указан?

4.30. 1) Точки A, B, C лежат на одной прямой, а точка O – вне этой прямой. Могут ли треугольники AOB и BOC с основаниями AB и BC быть равнобедренными? Обоснуйте ответ. 2) Могут ли окружность и прямая пересекаться более чем в двух точках?

4.31*. 1) Из одной точки проведены две касательные к окружности. Докажите, что отрезки касательных AB и AC равны. Здесь B и C – точки касания. 2) Докажите, что через одну точку не может проходить больше двух касательных к окружности.

4.32*. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что $AC_1 = \frac{1}{2}$ $(AB + AC - BC)$.

4.2. Геометрические построения

4.2.1. Простейшие построения.

Пример 1. Построим угол, равный данному.

Решение. Прежде всего уточним, как нужно понимать эту задачу, т.е. уточним, что здесь дано и что нужно построить. Дан $\angle(pq)$ с вершиной в точке O. Требуется с помощью циркуля и линейки (без масштабных делений) построить такой угол ABC, который был бы равен данному углу (pq).

Для этого проведем произвольную окружность с центром в точке O. Точки пересечения этой окружности с лучами p и q соответственно обозначим через точки P и Q (рис. 4.14). Возьмем произвольный луч a с началом в точке A и проведем окружность с центром в точке A и радиусом OP. Эту окружность обозначим через $\omega(A; OP)$. Находим точку $B = a \cap \omega(A; OP)$. Проведем другую окружность $\omega(B; PQ)$ (с центром B и радиусом PQ). Точку пересечения окружностей $\omega(A; OP)$ и $\omega(B; PQ)$ обозначим через C. Проведем луч AC. Тогда $\angle BAC$ – искомый.

Действительно, $\triangle OPQ = \triangle ABC$ (по построению; $AB = OP$, $AC = OQ$, $BC = PQ$ (по III признаку равенства треугольников)). Поэтому $\angle POQ = \angle BAC$.

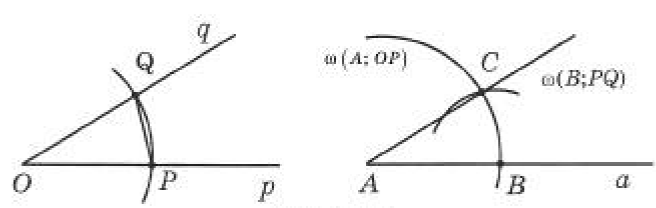


Рис. 4.14

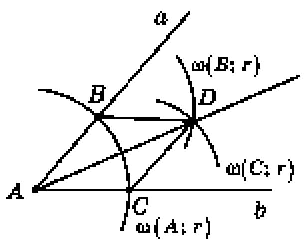


Рис. 4.15

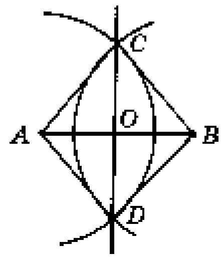


Рис. 4.16

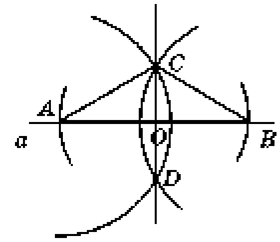


Рис. 4.17

Пример 2. Построим биссектрису данного угла.

Решение. Пусть дан угол (ab) с вершиной A. Проведем окружность $\omega(A; r)$, r – любое положительное число. Обозначим $B = a \cap \omega(A; r)$ и $C = b \cap \omega(A; r)$. Теперь построим окружности $\omega(B; r)$ и $\omega(C; r)$. Их точку пересечения обозначим буквой D. Проведем луч AD. Тогда AD является биссектрисой угла (ab). Это следует из равенства $\Delta ABD = \Delta ACD$ (рис. 4.15).

Пример 3. Разделим отрезок пополам.

Решение. Пусть дан отрезок AB. Построим окружности $\omega(A; r)$ и $\omega(B; r)$, $r > \frac{AB}{2}$ (рис. 4.16). Эти окружности пересекаются в двух точках: C и D. Проведем прямую CD. Точка $O = AB \cap CD$ и есть искомая середина отрезка $AB : OA = OB$. Действительно, ΔACD и ΔBDC – равнобедренные, они равны между собой (по трем сторонам). Тогда $\angle ACD = \angle BCD$, т.е. CO является биссектрисой равнобедренного треугольника ACB. Тогда CO является и медианой этого треугольника. Поэтому $OA = OB$.

Пример 4. Через данную точку O проведем прямую, перпендикулярную данной прямой a.

Решение. Возможны два случая: 1) $O \in a$; 2) $O \notin a$.

Рассмотрим случай 1) $O \in a$. Проведем окружность $\omega(O; r)$ с произвольным радиусом r. Прямая a пересекается с окружностью $\omega(O; r)$ в двух точках A и B(рис. 4.17). Проведем две окружности $\omega(A; r_1)$ и $\omega(B; r_1)$ с радиусами r_1 $(r_1 > r)$.

Точку пересечения этих окружностей обозначим буквой C. Тогда прямая OC – искомая, т.е. $OC \perp a$. Действительно, так как $\Delta AOC = \Delta BOC$ (по трем сторонам), то $\angle AOC = \angle BOC = 90°$.

2) $O \notin a$ (рис. 4.18). Проведем окружность $\omega(O; r)$, пересекающую прямую a в точках A и B. Окружности $\omega(A; r)$ и

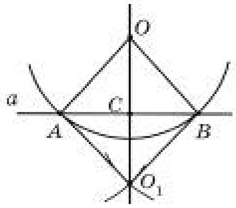


Рис. 4.18

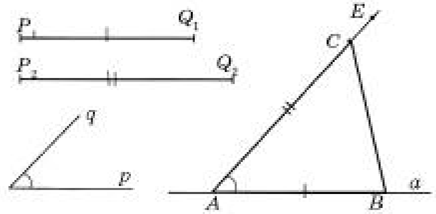


Рис. 4.19

$\omega(B; r)$ пересекаются в точках O и O_1. Тогда прямая OO_1 – искомая, т.е. $OO_1 \perp a$.

Действительно, $\Delta AOB = \Delta AO_1B$ (по трем сторонам). Тогда $\angle OAB = \angle O_1AB$ и по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними) $\Delta AOC = \Delta AO_1C$. Здесь $C = OO_1 \cap a$. Следовательно, $\angle ACO = \angle ACO_1 = 90°$.

4.2.2. Построение треугольника по трем элементам.

Пример 5. Построим треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Решение. Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и угол (pq). Требуется построить треугольник ABC такой, что $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle(p\ q)$ (рис. 4.19). Проведем прямую a, с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1. Построим угол BAE, равный углу (pq). На луче AE отложим точку C так, чтобы отрезок AC был равен отрезку P_2Q_2. Соединим точки B и C. Тогда ΔABC искомый.

Действительно, $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$ и $\angle BAC = \angle(pq)$. (по построению).

Пример 6. Построим треугольник по трем сторонам.

Решение. Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3. Требуется построить треугольник ABC такой, что $AB=P_1Q_1$, $AC=P_2Q_2$, $BC=P_3Q_3$. На прямой a отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 4.20). Проведем окружности $\omega(A; P_2Q_2)$ и $\omega(B; P_3Q_3)$. Точку их пересечения обозначим буквой C. Соединим точки B и C. Тогда ΔABC – искомый. В самом деле, по построению $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $BC= P_3Q_3$. Задача имеет 2 решения. Тре-

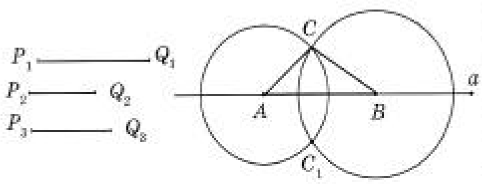


Рис. 4.20

угольник ABC_1 также удовлетворяет требованиям задачи. Эта задача не всегда имеет решение. Необходимо, чтобы сумма любых двух данных отрезков была больше третьего.

4.2.3. Задачи на построение. С геометрическими построениями приходится иметь дело многим специалистам, чьи работы тесно связаны с чертежами: чертежникам, архитекторам, конструкторам, геодезистам, штурманам, слесарям, закройщикам, столярам и т.п.

Выше мы показали, как выполняются простейшие построения. Теперь покажем, как выполняются более сложные задачи на построение. В задаче на построение требуется построить геометрическую фигуру, удовлетворяющую тем или иным условиям. Если не указано, с помощью каких инструментов нужно выполнять построение, значит, имеются в виду только линейка и циркуль. Решение задач на построение обычно состоит из ***анализа***, с помощью которого определяется способ ***решения, построения*** и ***доказательства***. В более сложных задачах к ним добавляется и такой пункт, как ***исследование***, в котором исследуется вопрос существования и единственности решения поставленной задачи.

Пример 7. Даны три точки A, B, C. Постройте точку X, которая равноудалена от точек A и B и которая находится на заданном расстоянии d от точки C.

Решение. I. Анализ. Искомая точка X удовлетворяет двум условиям: а) она одинаково удалена от точек A и B; б) она находится на данном расстоянии d от точки C.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих условию а), есть серединный перпендикуляр к отрезку AB. Геометрическое место точек, удовлетворяющих условию б), есть окружность с центром в точке C и радиусом d. Тогда искомая точка лежит на пересечении этих фигур.

II. Построение. 1) Построим серединный перпендикуляр a к отрезку AB (рис. 4.21). 2) Построим окружность $\omega(C;d)$. 3) Находим точку X как пересечение прямой a и окружности $\omega(C;d)$. Найденная точка X искомая.

III. Доказательство. $AX = BX$ и $CX = d$ по построению. Следовательно, найденная точка X удовлетворяет всем требованиям задачи.

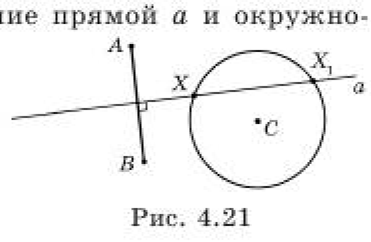


Рис. 4.21

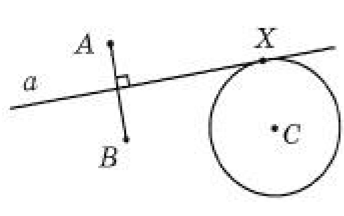


Рис. 4.22

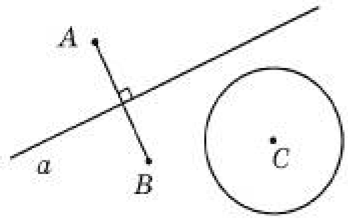


Рис. 4.23

IV. Исследование. Обозначим через d_1 расстояние от точки C до серединного перпендикуляра a к отрезку AB. Если $d_1 < d$, то прямая a и окружность $\omega(C; d)$ пересекаются в двух точках X и X_1 (рис. 4.21). То есть задача имеет два решения. Если $d = d_1$, то задача имеет единственное решение (рис. 4.22). Если $d_1 > d$, то задача не имеет решения (рис. 4.23).

?

1. Как построить угол, равный данному углу?
2. Как построить биссектрису данного угла?
3. Как разделить отрезок пополам?
4. Как провести перпендикуляр к заданной прямой, проходящий через заданную точку?
5. Как построить треугольник по трем элементам:
   а) по двум сторонам и углу между ними;
   б) по трем сторонам;
   в) по стороне и двум прилежащим углам?
6. Что такое задача на построение? В чем суть анализа, построения, доказательства и исследования?

ПЗ

1. Постройте равносторонний тругольник со стороной, равной 5 см.
2. Постройте равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 6 см, а угол при вершине равен: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

Упражнения

A

4.33. Даны точки A и B. Что представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B?

4.34. Что представляет собой геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной точки?

4.35. Что представляет собой геометрическое место центров равных окружностей, проходящих через данную точку?

4.36. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

4.37. Найдите геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой.

4.38. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых.

4.39. Даны отрезок PQ и угол (hk). Постройте треугольник ABC так, чтобы:

1) $AB=PQ$, $\angle ABC = \angle(hk)$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle(hk)$;

2) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle(hk)$, $\angle BAC = \frac{1}{4}\angle(hk)$.

4.40. Даны два угла (hk), (h_1k_1) и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = PQ$, $\angle A = \angle(hk)$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle(h_1k_1)$.

4.41. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам (рис 4.24).

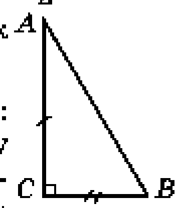


Рис. 4.24

4.42. Постройте равнобедренный треугольник: 1) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; 2) по основанию и углу при основании; 3) по боковой стороне и углу при вершине; 4) по основанию и боковой стороне; 5) по основанию и медиане, проведенной к основанию.

4.43. Даны отрезки длиной a, b и c. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = a$, $BC = b$, $AC = 2c$. Всегда ли задача имеет решение?

4.44. Даны отрезки длиной a, b и c. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = 2a$, $BC = b$, $AC = c$. Всегда ли задача имеет решение?

4.45. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной к основанию.

4.46. Постройте прямоугольный треугольник: 1) по гипотенузе и острому углу; 2) по гипотенузе и катету; 3) по катету и прилежащему острому углу; 4) по катету и противолежащему острому углу.

4.47. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

4.48. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.

4.49. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

4.50. На данной прямой укажите точку, которая находится на данном расстоянии от другой данной прямой.

4.51. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону.

4.52. На данной прямой укажите точку, равноудаленную от двух данных точек.

4.53. Постройте окружность, которая касается сторон данного угла, причем одной из них – в данной точке.

4.54. Проведите через данную точку прямую, касающуюся данной окружности.

B

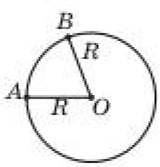


Рис. 4.25

4.55. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, с центром на данной прямой.

4.56. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки (рис. 4.25).

4.57. Даны прямая a, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на прямой a и $AC = PQ$.

4.58. Даны окружность, точки A, B и отрезок PQ. Постройте ΔABC так, чтобы вершина C лежала на окружности и $AC = PQ$.

4.59. На прямой, содержащей сторону BC треугольника ABC, постройте точку, равноудаленную от вершин A и C.

4.60. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на четыре равные части.

4.61. На данной прямой найдите точку, равноудаленную от двух данных точек.

4.62. Даны четыре точки: A, B, C, D. Найдите точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и одинаково удалена от точек C и D.

4.63. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.

4.64. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

4.65. Постройте прямоугольный треугольник по катету и высоте, опущенной на гипотенузу.

4.66. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

4.67. Даны прямая a и отрезок AB. Постройте прямую m, параллельную прямой a так, чтобы расстояние между прямыми a и m было равно AB.

4.68. Через три данные точки проведите окружность. Всегда ли задача имеет решение?

4.69. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: 1) 30°; 2) 60°; 3) 15°; 4) 135°; 5) 75°.

C

4.70. Внутри угла дана точка A. Постройте прямую, проходящую через точку A и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

4.71. Дан равносторонний треугольник ABC и точка B_1 на стороне AC. На сторонах BC и AB постройте точки A_1 и C_1 так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.

4.72*. Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

4.73*. Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.

4.74*. Дан треугольник ABC с прямым углом A. На стороне AB постройте точку K, находящуюся на расстоянии AK от прямой BC.

Раздел 5. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ МАТЕРИАЛА, ИЗУЧЕННОГО В 7 КЛАССЕ

5.1. Зная, что $AB = 8$, K – середина отрезка AB, найдите на прямой AB все такие точки X, чтобы выполнялось равенство $AX + BX + KX = 9$. Покажите эти точки на рисунке.

5.2. Зная, что $AB = 8$ см, K – середина отрезка AB, найдите на прямой AB все такие точки X, чтобы выполнялось равенство $AX + BX + KX = 15$ см. Покажите эти точки на рисунке.

5.3. На рисунке 5.1 BE и CF – высоты треугольника ABC. При помощи только линейки постройте высоту AX этого треугольника. Найдите длину отрезка BC, если $AX = BE$, $CX = CF$ и $AC = 17$ дм.

5.4. На рисунке 5.2 KP и ME – высоты треугольника KLM. При помощи только линейки постройте высоту LX этого треугольника. Найдите угол XLM, если $KP = LX$, $MP = MX$ и $\angle PKM = 27°$.

5.5. 1) На одной стороне угла с вершиной A отмечены точки D и B, на другой стороне – C и E так, что $AD = AC = 3$ см, $AB = AE = 4$ см. Докажите, что: а) $BC = DE$; б) $KB = KE$, где K – точка пересечения отрезков BC и ED.

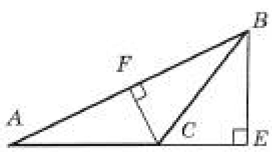


Рис. 5.1

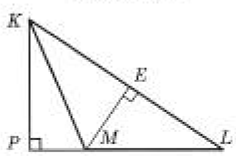


Рис. 5.2

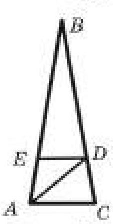


Рис. 5.3

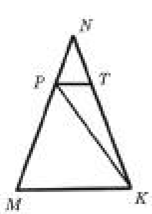


Рис. 5.4

2) ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ – равнобедренные треугольники с основаниями AC и A_1C_1, точки K и K_1 – середины сторон BC и B_1C_1 соответственно. $AB = A_1B_1$, $AK = A_1K_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

5.6. AC и A_1C_1 – основания равнобедренных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, точки K и K_1 – середины сторон BC и B_1C_1 соответственно, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$. Докажите, что $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$.

5.7. На рисунке 5.3 $AB = BC$, $ED = AE$, $\angle C = 80°$, $\angle DAC = 40°$. Докажите, что прямые ED и AC параллельны. Найдите $\angle BED$.

5.8. На рисунке 5.4 $PN = NT$, PK – биссектриса угла MPT, $\angle NPT = 70°$, $\angle PKM = 55°$. Докажите, что прямые PT и MK параллельны. Найдите $\angle PKT$.

5.9*. Два населенных пункта A и B находятся по одну сторону от прямой дороги. Где на дороге расположить автобусную остановку C, чтобы сумма расстояний $AC + BC$ была наименьшей?

5.10*. Докажите, что если точка X лежит внутри треугольника ABC, то $XB + XC < AB + AC$.

5.11. В равнобедренном треугольнике один из углов равен $120°$, а основание равно 10 см. Найдите высоту, проведенную к боковой стороне.

5.12. В равнобедренном треугольнике один из внешних углов равен $60°$, высота, проведенная к боковой стороне, равна 17 см. Найдите основание треугольника.

5.13. Докажите, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведенная из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противоположной стороны.

5.14. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка N, такая, что $\angle NBC = 30°, \angle NCB = 10°$. Найдите угол ANC, если $\angle BAC = 80°$.

5.15. Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

5.16. Отрезок BB_1 – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AB > B_1A$ и $BC > B_1C$.

5.17. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой a. Перпендикуляры AP и BN к прямой a равны. Отрезки AB и PN пересекаются в точке K. Докажите, что точка K делит каждый из них пополам.

5.18. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AN и BK к прямой a равны. Отрезки AK и BN пересекаются в точке O. Докажите, что точка O равноудалена от точек A, N, K и B.

5.19. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведенных из этой же вершины.

5.20. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, пополам.

5.21. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Докажите, что треугольник прямоугольный.

5.22. В треугольнике ABC высота AA_1 не меньше стороны BC, а высота BB_1 не меньше стороны AC. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

5.23*. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

5.24*. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон.

5.25*. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

5.26. Постройте треугольник ABC по стороне BC, медиане BN и высоте BH.

5.27. Постройте треугольник ABC по сторонам AC, BC и медиане BN.

5.28. Постройте прямоугольный треугольник ABC, если даны острый угол B и биссектриса BD.

5.29. На данной окружности постройте точку, равноудаленную от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

5.30. Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Постройте точку, равноудаленную от этих прямых. Сколько решений имеет задача?

5.31. Дана окружность с центром O и точка A вне ее. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C, таких, что $AB = BC$.

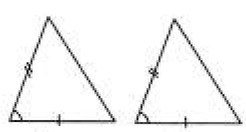
5.32. Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведенной из вершины другого угла.

5.33. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

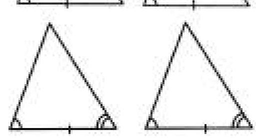
5.34*. Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон.

5.35*. Проведите общую касательную к двум данным окружностям.

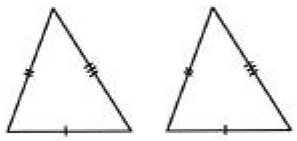
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ



I. По двум сторонам и углу между ними.

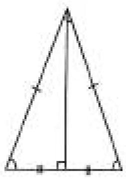


II. По стороне и прилежащим к ней углам.

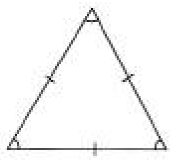


III. По трем сторонам.

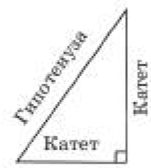
ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



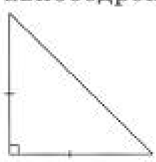
Равнобедренный



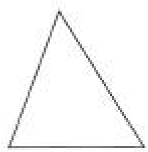
Равносторонний



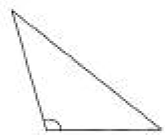
Прямоугольный



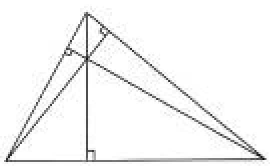
Прямоугольный равнобедренный



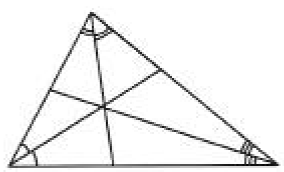
Остроугольный



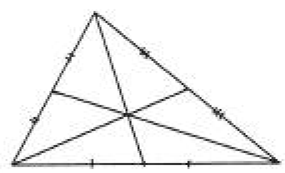
Тупоугольный



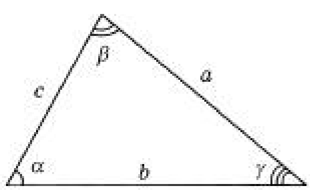
Высоты треугольника



Биссектрисы треугольника



Медианы треугольника



Сумма внутренних углов треугольника:

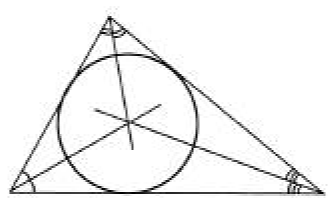
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Неравенство треугольников:

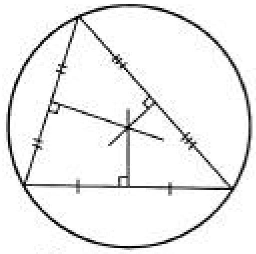
$a + b > c$,

$a + c > b$,

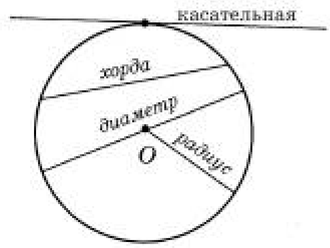
$b + c > a$.



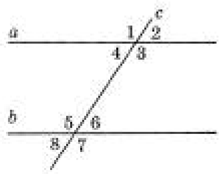
Окружность, вписанная в треугольник



Окружность,
описанная около
треугольника

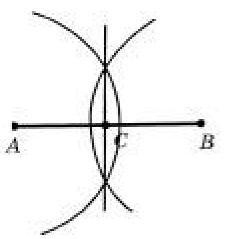


Окружность и ее
элементы
O – центр окружности

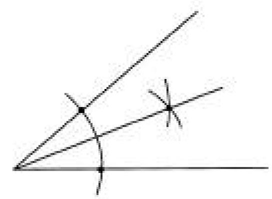


Признаки параллельности прямых:
I. $a \parallel b$, если $\angle 4 = \angle 6$ ($\angle 3 = \angle 5$).
II. $a \parallel b$, если $3 + \angle 6 = 180^\circ$ ($\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$)
III. $a \parallel b$, если $\angle 4 = \angle 5$ ($\angle 2 = \angle 6$, или $\angle 4 = \angle 8$, или $\angle 3 = \angle 7$).

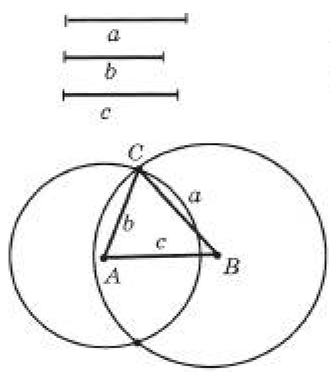
ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ



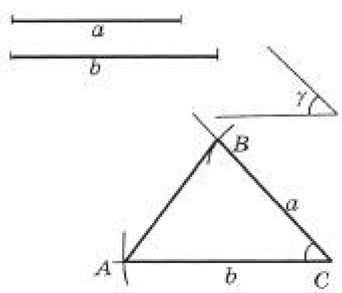
Деление отрезка
пополам



Построение
биссектрисы угла



Построение треугольника
по трем сторонам



Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними

ОТВЕТЫ

Раздел 1. Начальные понятия и аксиомы планиметрии

1.1. 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 18,1 м. **1.4.** Не принадлежит. **1.5.** 5,9 см. **1.6.** 0,6 дм. **1.8.** 6 прямых. **1.9.** 6 точек. **1.10.** Не может. **1.11.** Не может. **1.12.** 1) AC=1 см, BC=1 см, AO=0,5 см, OB=1,5 см; 2) AB==6,4 м, AC=3,2 м, AO=1,6 м, OB=4,8 м. **1.13.** 1) 12 см или 2 см; 2) 37,9 дм. **1.14.** 1) 20 см или 4 см; 2) 0,84 м. **1.15.** 1) Не является; 2) 4,3 дм. **1.16.** 1) Не является; 2) 5 дм. **1.19.** 1) 10,5 см; 2) 1,5 см. **1.20.** $\frac{a}{2}$. **1.21.** 4 см. **1.22.** 2) AC и BD. **1.23.** 2) AB и CD. **1.28.** 2°15'; 8°20'. **1.29.** 375'; 120'; 690'. **1.35.** 15°; 2,5°. **1.36.** 20°. **1.37.** В 4 раза. **1.41.** 1) 121°; 2) 121°2'. **1.42.** 48°. **1.43.** 85°. **1.44.** 81°. **1.45.** 60°. **1.47.** 11 см. **1.49.** $\angle A = 40°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 80°$. **1.53.** Только одну. **1.56.** Не может. **1.57.** 1) 70°18', 17 дм; 2) нет. **1.58.** 1) 16 дм; 121°15'; 2) нет. **1.61.** 1) 5 м, 15°; 2) нет. **1.62.** 1) 8 м, 60°; 2) нет. **1.67.** 150°, 135°, 120°, 90°. **1.68.** 1) Нет; 2) нет; 3) да. **1.69.** 60°, 120°. **1.70.** 1) 105°, 75°; 2) 110°, 70°; 3) 45°, 135°; 4) 90°, 90°. **1.71.** 1) 69°; 2) 90°; 3) 165°. **1.72.** 180°. **1.73.** $\angle AOC$=120°, $\angle BOD$=130°, $\angle COE$=110°, $\angle COD$==60°. **1.75.** 160°. **1.76.** Нет. **1.77.** По 90°. **1.79.** 1) 72° и 108°; 2) 54° и 126°; 3) 55° и 125°; 4) 88° и 92°. **1.80.** 130°. **1.81.** 25° и 55°. **1.82.** 144° и 36°. **1.83.** 65° и 115°. **1.84.** 90°. **1.85.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **1.88.** 30° или 90°. **1.91.** 1) Не проходит; 2) не может.

Раздел 2. Признаки равенства треугольников и их следствия

2.0. 2) 42°, 47°. **2.2.** 2) BD = 5 см, AB = 15 см. **2.3.** 2) AB = 14 см, BC = 17 см. **2.6.** 43°. **2.7.** 59°. **2.8.** 2) 110°. **2.12.** 8 см. **2.20.** 17 см. **2.21.** 2 см. **2.22.** 50°. **2.23.** 120°. **2.24.** 75°. **2.25.** 3,5 м. **2.26.** 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **2.29.** 45°. **2.30.** 2) 134°. **2.31.** 2) 96°. **2.32.** 10 см, 20 см и 20 см. **2.33.** AB=12,5 см и BC=15 см. **2.40.** 1) 50°; 2) 14 см. **2.42.** 8 см.

Раздел 3. Взаимное расположение прямых

3.1. 1) Нет; 2) да. **3.2.** 1) Нет; 2) да. **3.3.** 115° и 65°. **3.8.**105°, 105°. **3.9.** $a \parallel c$. **3.10.** 2) Четыре угла по 55°, четыре других угла по 125°. **3.11.** 45°, 45°, 90°. **3.12.** 16 см. **3.13.** 60°. **3.14.** 10°, 140°. **3.15.** 1) 100°; 2) 65°. **3.16.** 1) 90°; 2) 120°; 3) 100°; 4) 153°. **3.17.** 1) 40°, 40°, 100° или 40°, 70°, 70°; 2) 60°, 60°, 60°; 3) 100°, 40°, 40°. **3.20.** 59°. **3.21.** 90°. **3.23.** 30°, 60° и 90°. **3.24.** 105°. **3.25.** 103°. **3.26.** 1) 9 см, 2) 9 см. **3.27.** 1) 9,5 см, 2) 9,5 см. **3.29.** 57°30', 57°30', 65° или 65°, 65°, 50°. **3.30.** 73°20', 73°20' и 33°20'. **3.31.** 40°, 50°, 90°. **3.33.** 40°, 50°, 90°. **3.34.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, медиана AD делит треугольник ABC на два равнобедренных треугольника. **3.35.** Докажите методом от противного. **3.37.** Сначала покажите, что прямая, проходящая через середины двух сторон треугольника, параллельна третьей стороне. **3.41.** Покажите, что $\triangle ADK$ является равнобедренным. **3.42.** Невозможно. **3.44.** 1) $\angle A > \angle B$. **3.45.** 1) Не существует; 2), 3) существует. **3.46.** 1) BC>>AC>AB; 2) AB>AC=BC. **3.47.** $\angle B > \angle A > \angle C$. **3.48.** 1) Равнобедренный. **3.49.** Не может. **3.50.** 1) Да; 2) нет. **3.51.** Остроугольный. **3.52.** 1) 5 см; 2) 21 см; 3) 6 дм. **3.53.** 10 см. **3.56.** AB=5 см. **3.58.** Используйте равенство $\Delta ACE = \Delta CAD$. **3.60.** 20 см, 20 см. **3.62.** 10 см, 10 см, 16 см. **3.64.** 29 см, 29 см.

Раздел 4. Окружность и геометрические построения

4.1. 5 см; нет. **4.5.** 70 см, 10 см. **4.6.** Не могут. **4.8.** Не может. **4.13.** 60°. **4.15.** Имеют. **4.17.** 120°, 60°. **4.19.** 140 см, 20 см. **4.21, 4.22.** Следует из равенства равнобедренных треугольников. **4.23.** 1) Следует провести перпендикуляр из центра окружности к данной прямой. 2) Через центр окружности следует провести два взаимно перпендикулярных диаметра, один из которых перпендикулярен данной прямой (рис. 1).

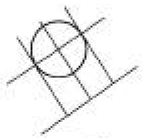


Рис. 1

4.24. Рис. 2.

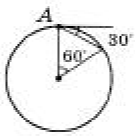


Рис. 2

4.25. $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. **4.30.** 1) Следует доказать методом доказательства от противного; 2) нельзя (три точки окружности не лежат на одной прямой). **4.31*.** 1) Надо применить равенство прямоугольных треугольников; 2) следует учесть, что радиус перпендикулярен касательной.

4.32*. $AB+AC-BC=(AC_1+BC_1)+(AB_1+CB_1)-$
$-(BA_1+CA_1)=AC_1+BC_1+AC_1-BC_1-CA_1=$
$=2AC_1 \Rightarrow AC_1=\frac{1}{2}\ (AB+AC-BC)$ (Рис. 3.)

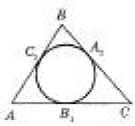


Рис. 3

4.33. Серединный перпендикуляр отрезка AB. **4.34.** Окружность. **4.35.** Окружность. **4.38.** Прямая, параллельная данным прямым. **4.42.** 1) Нужно построить треугольник по стороне a и прилежащим углам α и $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$; 3) построить треугольник по углам α, $\beta = 180^\circ - 2\alpha$, и стороне a; 4) построить треугольник по трем сторонам; 5) построить треугольник с катетами $\frac{a}{2}$ и h.

4.45. Рис. 4.

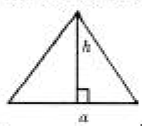


Рис. 4

4.46. 1) Рис. 5; 2) рис. 6; 3) рис. 7.

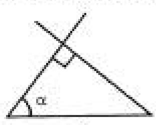


Рис. 5

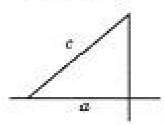


Рис. 6

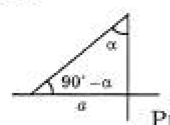


Рис. 7

4.48. Рис. 8.

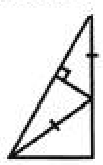


Рис. 8

4.49. Рис. 9.

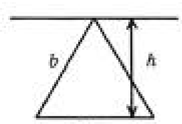


Рис. 9

4.50. Рис. 10.

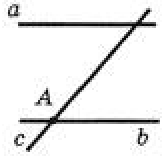


Рис. 10

4.51. Рис. 11.

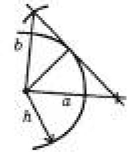


Рис. 11

4.52. Точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку с концами в данных точках и данной прямой.

4.54. Построить прямоугольный треугольник с прямым углом OAB (рис. 12).

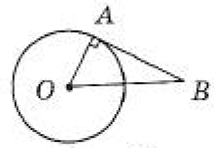


Рис. 12

4.55. Достаточно построить окружность с центром в данной точке и данным радиусом.

4.58. Рис. 13.

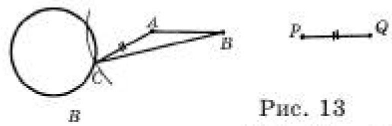


Рис. 13

4.59. Рис. 14.

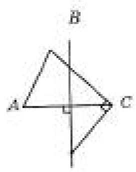


Рис. 14

4.61. Рис. 15.

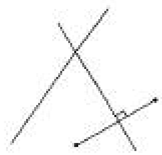


Рис. 15

4.62. Точка пересечения двух серединных перпендикуляров. **4.63.** Пусть ΔABC – искомый: $\angle B = \beta$, $BC = a$. Если $AB > AC$, то найдем точку $D \in AB$: $AD = AC$ и $BD = AB - AC$. Тогда треугольник ACD – равнобедренный. **4.64.** См. задачу **4.63.** **4.70.** *Указание.* Сначала проведите биссектрису угла. **4.71.** *Указание.* На сторонах BC и AB постройте точки A_1 и C_1 так, чтобы $BA_1 = AC_1 = CB_1$ **4.72*.** *Указание.* Сначала постройте прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной медиане, а катет – данной высоте. **4.73*.** *Указание.* Сначала постройте прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной биссектрисе, а катет – данной высоте. **4.74*.** *Указание.* Сначала постройте биссектрису угла C.

Раздел 5. Упражнения для повторения материала, изученного в 7 классе

5.1. Точка X не может находиться на прямой AB вне отрезка AB. Пусть точка X принадлежит отрезку AB и лежит между точками K и B. Обозначим $AX = y$. Тогда, учитывая условие, имеем $y + 8 - y + y - 4 = 9$, т.е. $y = 5$. Следовательно, расстояние от точки X до точки K равно 1 и точка X лежит справа от точки K. Если же X лежит слева от точки K, то, аналогично рассуждая, получим еще одну точку, удовлетворящую условию задачи. **5.2.** На прямой AB, вне отрезка AB, на расстоянии 1 см от его концов (две точки). Задача решается аналогично задаче **5.1.** **5.3.** Пусть прямые, на которых лежат высоты треугольника, CF и BE, пересекаются в точке H. Тогда AH – прямая, которой принадлежит третья высота. Обозначим точку пересечения этой прямой с прямой BC через $(X = AH \cap BC)$. В таком случае AX – искомая высота. Из равенства $\Delta AXC = \Delta BEC$ следует, что $BC =$ 17 дм. **5.4.** $\angle PKM = \angle XLM = 27^\circ$. **5.5.** а) $\Delta ABC = \Delta AED$, т. к. $\angle A$ общий и по условию $AD = AC$, $AB = AE$ (I признак).Следовательно, $BC = DE$. б) Т. к. $\Delta ABC =$

$= \Delta AED$, то $\angle ABC = \angle AED$ и $\angle ACB = \angle ADE$, т. е. $\angle BDE = \angle BCE$, как внешние углы равных углов. С другой стороны $BD = AB - AD = 4 - 3 = 1$ см и $CE = AE - AC = 1$см, т.е. имеем $\angle DBK = \angle CEK$, $\angle BDK = \angle ECK$ и $BD = CE$. Тогда по II признаку $\Delta BDK = \Delta ECK$, т. е. $KB = KE$. **5.6.** 1) $\Delta ABC = A_1B_1C_1$ (III признак) $\Rightarrow BK = B_1K_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1 \Rightarrow$ по I признаку $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$. **5.7.** По условию $AB = BC$, ΔABC равнобедренный и $\angle A = \angle C = 80^\circ$. Тогда $\angle EAD = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$. Так как $AE = ED \Rightarrow \Delta AED$ – равнобедренный и $\angle EAD = \angle EDA = 40^\circ$. $ED \parallel AC$, так как $\angle EDA = \angle DAC$ как накрест лежащие углы, $\angle BED = \angle BAC = 80^\circ$ как соответствующие углы. **5.8.** Аналогично задаче 5.7. **5.9.** Пусть $AA_1 \perp a$, a – дорога. $AA_1 \cap a = D$ и пусть $A_1D = AD$. Тогда остановку нужно строить в точке $D = A_1B \cap a$. **5.10*.** *Указание.* Пусть $N = BX \cap AC$. Примените неравенство треугольника к ΔABN и ΔXNC. **5.11.** 5 см. **5.12.** 34 см. **5.13.** *Указание.* Воспользуйтесь соотношениями между сторонами и углами треугольника и теоремой о сумме углов треугольника. **5.14.** 70°. *Указание.* Пусть O – точка пересечения биссектрисы угла A и прямой BN. Сначала докажите , что $\Delta AOC = \Delta NOC$. **5.15.** *Указание.* Соедините один из концов отрезка с вершиной треугольника. **5.16.** *Указание.* Воспользуйтесь соотношениями между сторонами и углами треугольника. **5.17.** $\angle AKP = \angle BKN$, ΔAPK и ΔBNK прямоугольные и $\angle AKP = \angle BKN \Rightarrow \angle PAK = \angle NBK \Rightarrow \Delta APK = \Delta BNK \Rightarrow PK = NK$ и $AK = KB$. **5.18.** $\Delta ANK = \Delta BKN$ (по двум катетам) $\Rightarrow \Delta BNK = \Delta AKN$ и $\angle NAK = \angle KBN$. Т.к. сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° и $\angle BNK + \angle ANB = 90^\circ \Rightarrow \angle BNA = \angle NAK$. Аналогично, $\angle BNA = \angle NAK = \angle KBN = \angle AKB \Rightarrow \Delta NOK$, ΔAON, ΔBOK – равнобедренные и $ON = OK = OA = OB$. **5.21.** *Указание.* Пусть в треугольнике ABC медиана AN и высота AH делят угол A на три равных угла BAH, HAN и NAC. Проведите перпендикуляр ND к стороне AC и докажите, что $ND = NH$. **5.22.** *Указание.* Учтите, что гипотенуза больше катета. **5.27.** Пусть ΔABC искомый и BN – его медиана. а продолжении медианы отметим точку D так, чтобы ND был равен BN. Тогда $\Delta CBN = \Delta DNA \Rightarrow AD = BC$. **5.29.** Четыре, три, два, одно или ни одного решения. **5.30.** Четыре решения. **5.31.** *Указание.* Сначала постройте ΔOAD, в котором $AD = R$ и $OD = 2R$, где R – радиус данной окружности. **5.32.** *Указание.* Пусть даны угол A, высота BH искомого треугольника ABC и отрезок PQ, равный его периметру. Сначала постройте треугольник ABH, а затем точку $D \in AH$, такую, что $AD + AB = PQ$. **5.33.** *Указание.* Постройте сначала треугольник, у которого сторона равна данному периметру, а углы, прилежащие к ней, равны половине данных углов. **5.34*.** *Указание.* BC, $AC + AB$, $\angle B - \angle C$ – данные элементы искомого треугольника ABC. На продолжении стороны CA за точку A отложите точку A_1 так, чтобы $AA_1 = AB$. Постройте сначала ΔCBA_1. **5.35*.** *Указание.* Сведите решение задачи к решению предыдущей задачи, построив вспомогательную окружность, концентричную одной из данных, с радиусом, равным сумме или разности радиусов данных окружностей.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

Раздел 2. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Раздел 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Раздел 4. ОКРУЖНОСТЬ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

Раздел 5. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырович
Шыныбеков Данияр Абдухалиевич

ГЕОМЕТРИЯ
Учебник для 7 класса общеобразовательной школы

Зав. редакцией *Н. Жиенгалиев*
Редактор *А. Изтлеуова*
Художник *А. Искаков*
Художественный редактор *Г. Айсина*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *Г. Туленова*

ИБ №052

Сдано в набор 24.03.2017. Подписано в печать 30.06.2017.
Формат 60х90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ.л. 5,0. Уч.-изд.л.5,05. Тираж 28000 экз. Заказ № 2556.

ТОО «Корпорация «Атамура», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.

Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамура» Республики Казахстан,
050002, г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.